Decisions Under Uncertainty using Bayesian Analysis

Prof.dr. Stelian STANCU
Catedra de Cibernetică Economică, A.S.E. Bucureşti

The present paper makes a short presentation of the Bayesian decions method, where extra-information bring a great support to decision making process, but also attract new costs. In this situation, getting new information, generally experimentaly based, contributes to diminushing the uncertainty degree that influences decision making process. As a conclusion, in a large number of decision problems, there is the possibility that the decision makers will renew some decisions already taken because of the facilities offered by obtainig extra-information.
Keywords: *decision, uncertainty, decision process, Bayesian analysis, extra-information.*

1 Modelul analizei Bayesiene

Nu de puţine ori, cea mai dificilă alegere la nivelul unei companii o reprezintă decizia între mai multe variante al căror rezultat final are un caracter incert. Ca urmare, analiza Bayesiană conduce la soluţionarea problemei în condiţii de incertitudine, adică acele situaţii când nu se cunoaşte starea naturii *S* şi când se ştie că evenimentele urmează a avea loc cu anumite probabilităţi.

În consecinţă, abordarea Bayesiană a priori conţine următoarele activităţi decizionale:
- identificarea stărilor naturii şi a listei deciziilor potenţiale;
- evaluarea rezultatului corespunzător fiecărei variante decizionale în contextul fiecărei stări a naturii;
- formalizarea stării de ignoranţă parţială a decidentului, în termeni ai probabilităţilor subiective ataşate stărilor naturii;
- evidenţierea consecinţelor aşteptate, corespunzătoare fiecărei decizii în parte;
- alegerea deciziei optime sau obţinerea unor informaţii suplimentare necesare revizuirii probabilităţilor a priori.

Se notează cu *S* spaţiul stărilor posibile ale naturii, $(s_j), j=\overline{1,n}$ şi cu *A* spaţiul deciziilor(acţiunilor sau strategiilor) posibile $(a_i), i=\overline{1,m}$. Informaţia a priori constă în asignarea de probabilităţi subiective $\{P_0(s_j)\}_{j=\overline{1,n}}$ stărilor naturii, reflectând gradul de ignoranţă parţială a decidentului.

Matricea decizională se poate reprezenta prin intermediul consecin-ţelor monetare π_{ij}, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ sau prin intermediul utilităţilor asociate acestora $U(\pi_{ij})$. Totodată, informaţia a posteriori va fi obţinută făcându-se apel la probabilităţile $\{P_1(s_j)\}_{j=\overline{1,n}}$ care reprezintă probabilităţile revizuite, pe baza informaţiilor suplimentare referitoare la stările naturii, obţinute prin proceduri de tip studii de piaţă, consultarea experţiilor etc.

Valoarea aşteptată a deciziei a_i, notată $E(a_i)$, se calculează astfel: $E(a_i)=\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)$.

Ca urmare, alegerea optimală luând în considerare informaţiile a priori se realizează, conform criteriului valorii aşteptate maxime, astfel: $\max_i E(a_i)=\max_i \sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)$

Un demers natural constă în încercarea de eliminare a incertitudinii intuind care va fi starea reală a naturii, care se va produce. Dacă s_k este această stare reală a naturii, problema care se pune constă în alegerea variantei care, în starea s_k maximizează $U(\pi_{ik})$, deci: $\max_i U(\pi_{ik})$.

Dar din păcate este imposibil a elimina incertitudinea, existând doar posibilitatea ca decidentul să obţină informaţii suplimentare, pe baza cărora să revizuiască probabilităţile iniţiale ataşate stărilor naturii, apelând la teorema lui Bayes.

Vom nota cu *Y* informația suplimentară rezultată pe baza unui experiment(studiu de piață, sondaj, consultarea unui expert sau grup de experți ş.a.).

Probabilitățile inițiale $\{P_0(s_j)\}_{j=\overline{1,n}}$ vor fi astfel revizuite pe baza rezultatelor Y obținute şi vor fi desemnate prin $\{P(s_j/Y)\}_{j=\overline{1,n}}$ sau $\{P_1(s_j)\}_{j=\overline{1,n}}$. Fie de asemenea, *Z* informația a priori care a permis să atribuim stării naturii (s_j) probabilitatea a priori $P_0(s_j)$, sau mai precis, $P(s_j/Z)$. Pornind de la informația a priori *Z* de care dispunem, probabilitatea de a obține un rezultat *Y* în urma demersului făcut pentru obținerea informației suplimentare va fi $P(Y/Z)$. Apelând la teorema lui Bayes, avem:

- probabilitățile a priori ale stărilor naturii $\{P(s_j/Z)\}_{j=\overline{1,n}}$;
- probabilitățile comune de a obține rezultatul *Y* şi starea naturii (s_j), în funcție de informația a priori *Z*:

$$P(s_j/Y\cap Z)=\frac{\lfloor P(s_j/Z)P(Y/s_j\cap Y)\rfloor}{P(Y/Z)}.$$

Costul incertitudinii ataşat unei probleme decizionale

Analiza Bayesiană se bazează pe faptul că decidentul poate îmbună-tăți cunoştințele sale referitoare la stările naturii, încercând să obțină informații suplimentare.

Acest demers nu este sistematic, întru-cât atrage costuri suplimen-tare, de unde necesitatea de a compara avantajul sperat a se obține pe această cale cu costul ocazionat de dobândirea informației suplimentare.

Pentru început trebuie calculat costul incertitudinii generat de faptul că decidentul deține doar informații parțiale asupra stărilor naturii.

Ca urmare, costul incertitudinii reprezintă diferența dintre valoarea aşteptată a deciziei pe care ar putea să o ia în condiții de informații perfecte şi valoarea aşteptată maximă fără alte informații sau altfel spus, valoarea aşteptată a informației perfecte (*EVIP*).

Se deduce astfel că valoarea globală, pentru toate stările naturii, condiționată de disponibilitatea informației perfecte *VIP* este:

$$VIP=\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)$$

În consecință, valoarea aşteptată a informației perfecte (*EVIP*) se obține scăzând din *VIP*, valoarea aşteptată(maximă) corespunzătoare deciziei în condiții de incertitudine, pe baza informației a priori:

EVIP=CI(Costul incertitudinii)=

$$=\sum_{j=1}^{n}\max_i U(\pi_{ij})P_0(s_j)-\max_i\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)$$

Costul incertitudinii reprezintă expresia bănească a sumei maxime pe care decidentul o consideră rezonabilă pentru a fi plătită pentru obținerea informației suplimentare.

2. Măsurarea costului incertitudinii luând în considerare pierderile de oportunitate aşteptată

Studiul valorii informației perfecte poate fi realizat prin măsurarea pierderii de oportunitate, definită ca diferență dntre consecința unei decizii alese în condiții de incertitudine şi consecința deciziei considerate a fi cea mai bună, ținând cont de starea naturii care se va realiza ulterior adoptării ei.

Scăzând din fiecare cantitate $U(\pi_{ij})$ o constantă α_j, care depinde numai de starea naturii s_j, şi nu de decizia adoptată (a_i), valoarea aşteptată a deciziei a_i se scrie astfel:

$$E(a_i)=\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_jP_0(s_j)$$

de unde se deduce că utilitatea aşteptată a deciziilor luate cu informații perfecte, $\sum_{j=1}^{n}\max_i U(\pi_{ij})P_0(s_j)$ se va diminua cu aceeaşi cantitate $\sum_{j=1}^{n}\alpha_jP_0(s_j)$.

Observație: Valoarea aşteptată a informației perfecte nu va fi afectată, deoarece termenul $\sum_{j=1}^{n}\alpha_jP_0(s_j)$ se reduce:

$$\sum_{j=1}^{n}\max_i U(\pi_{ij})P_0(s_j)-\max_i \sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)$$

Notând cu $\alpha_j=\max_i U(\pi_{ij})$, atunci utilitatea aşteptată a informaţiei perfecte este nulă:

$$\sum_{j=1}^{n}\max_i U(\pi_{ij})P_0(s_j)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j P_0(s_j)=\sum_{j=1}^{n}\max_i U(\pi_{ij})P_0(s_j)-\sum_{j=1}^{n}\max_i U(\pi_{ij})P_0(s_j)=0$$

Avem, de asemenea:

$$EVIP=\sum_{j=1}^{n}\max_i U(\pi_{ij})P_0(s_j)-\max\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)=\{\sum_{j=1}^{n}\max_i U(\pi_{ij})P_0(s_j)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j P_0(s_j)\}-\{\max\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j P_0(s_j)\}=-\max\sum_{j=1}^{n}(U(\pi_{ij})-\alpha_j)P_0(s_j)$$

Vom nota cu $h_{ij}=\max_i U(\pi_{ij})-U(\pi_{ij})$, respectiv diferenţa dintre utilitatea celei mai bune decizii în starea s_j şi utilitatea lui a_i pentru aceeaşi stare. Mărimea h_{ij} arată pierderea de oportunitate ca urmare a alegerii variantei a_i, atunci când se va realiza starea naturii s_j. Observăm totodată că $h_{ij}=0$ dacă a_i coincide cu cea mai bună decizie în starea naturii s_j. De aici se deduce posibilitatea utilizării unui alt criteriu de alegere a deciziei optimale, prin alegerea în locul $\max\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)$ a deciziei căreia îi corespunde pierderea de oportunitate aşteptată minimă:

$\min_i\{\sum_{j=1}^{n}h_{ij}P_0(s_j)\}$. Mărimea astfel determinată conduce la valoarea aşteptată a informaţiei perfecte şi deci, costul incertitudinii.

În concluzie, cele două reguli decizionale prezentate sunt echivalente, criteriul pierderii de oportunitate minimă furnizând direct valoarea aşteptată a informaţiei perfecte.

Costul incertitudinii măsoară astfel pierderea de oportunitate aşteptată în raport cu cea mai bună decizie posibilă, ţinând cont de informaţia a priori, reflectată în distribuţia de probabilitate a stărilor naturii. Diferenţa între pierderea de oportunitate aşteptată a unei decizii oarecare şi costul incertitudinii reprezintă aşa numitul cost de iraţionalitate.

El măsoară excedentul pierderii de oportunitate aşteptată a deciziei alese în raport cu acela al celei mai bune decizii posibile, în conformitate cu informaţia disponibilă despre stările naturii.

3. Valoarea aşteptată a informaţiei suplimentare

Fie *C* costul necesar obţinerii unei informaţii perfecte. Utilitatea aşteptată a informaţiei perfecte se modifică de la $\max_i\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)$ devenind: $\max_i\{\sum_{j=1}^{n}(U(\pi_{ij})-C)P_0(s_j)\}$, de unde faptul că valoarea informaţiei perfecte este dată de:

$$VIP=\sum_{j=1}^{n}\max_i(U(\pi_{ij})-C)P_0(s_j)-\max_i\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j)$$

Deşi posibilităţile de obţinere a informaţiei perfecte sunt limitate, totuţi decidentul poate încerca reducerea incertitudinea prin achiziţionarea unei informaţii suplimentare necesară revizuirii probabilităţilor preliminare (a priori).

În acest scop şi potrivit discuţiei următoare, vom nota cu *Y* cantitatea de informaţii suplimentare obţinute în acest sens, în timp ce probabilitatea condiţionată a obţinerii rezultatului *Y*, ţinând seama de informaţia a priori asupra stărilor naturii $\{P(Y/s_j)\}$ este presupusă a fi cunoscută. Astfel, pot fi revizuite probabilităţile a priori $P_0(s_j)$ în funcţie de informaţia suplimentară *Y*, pe baza teoremei lui Bayes, noul criteriu de alegere fiind acum: $\max_i\sum_{j=1}^{n}U(\pi_{ij})P_0(s_j/Y)$, în loc de:

$\max_i \sum_{j=1}^{n} U(\pi_{ij}) P_0(s_j)$.

Noul criteriu, tocmai enunțat, este subordonat realizării rezultatului *Y* obținut din cercetarea întreprinsă pentru obținerea unor informații suplimentare asupra stării naturii.

Pornind de la faptul că decidentul dispune a priori de o distribuție de probabilitate $\{P_0(s_j)\}$ şi cunoaşte probabilitatea condiționată de obținere a rezultatelor *Y* în funcție de informația a priori asupra lui s_j, $\{P(Y/s_j)\}$, probabilitatea marginală a rezultatului *Y* este deci dată de: $P(Y) = \sum_{j=1}^{n} P(Y/s_j) P_0(s_j)$.

În schimb, dacă rezultatul *Y* se obține ca urmare a informației suplimentare, decidentul va alege a_i astfel încât:

$$\max_i E(a_i / Y) = \max_i \sum_{j=1}^{n} U(\pi_{ij}) P_0(s_j / Y)$$

de unde, utilitatea aşteptată a informației suplimentare se poate scrie ca fiind:

$$\sum_Y \max_i \sum_{j=1}^{n} U(\pi_{ij}) P_0(s_j / Y) P(Y)$$

Ca urmare, este suficient a multiplica utilitatea maximală a fiecărei decizii a_i atunci când un rezultat *Y* apare, prin probabilitatea corespunzătoare de apariție a rezultatului *Y*: $P(Y)$ şi de a face suma probabilităților pentru toate rezultatele posibile.

Prelucrând expresia precedentă, pentru a facilita calculele numerice, pe baza teoremei lui Bayes, se obține:

$P(Y/s_j) = [P(Y/s_j) P_0(s_j)] / P(Y)$, de unde $P(Y/s_j) P(Y) = P(Y/s_j) P_0(s_j)$ şi deci utilitatea aşteptată a informației suplimentare este:

$$\sum_Y \max_i \sum_{j=1}^{n} U(\pi_{ij}) P_0(Y/s_j) P_0(s_j)$$

Pentru a obține valoarea informației suplimentare, este suficient a compara acest rezultat cu cel obținut pe baza informației a priori:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} U(\pi_{ij}) P_0(s_j)$$

Valoarea aşteptată a informației suplimentare va fi astfel dată de:

$$EVIS = \sum_Y \max_i \sum_{j=1}^{n} U(\pi_{ij}) P_0(Y/s_j) P_0(s_j) - \max_i \sum_{j=1}^{n} U(\pi_{ij}) P_0(s_j)$$

din această mărime putând fi scăzut costul informației suplimentare.

De asemenea, se poate face analiza în termenii pierderilor de oportunitate aşteptată, caz în care utilitatea aşteptată a informației suplimentare se scrie:

$\sum_Y \{\min_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij} P_0(s_j / Y)\} P(Y)$. Pierderea de oportunitate aşteptată fără informații suplimentare este astfel dată de: $\min_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij} P_0(s_j)$, iar valoarea aşteptată a informației suplimentare poate fi scrisă astfel:

$$EVIS = \min_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij} P_0(s_j) - \sum_Y \{\min_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij} P_0(s_j / Y)\} P(Y)$$

În concluzie, se poate evidenția faptul că într-un număr mare de probleme decizionale, există posibilitatea ca decidenții să revină asupra unor variante deja adoptate, ca urmare a facilităților oferite de obținerea unor informații suplimentare.

Aceste informații au darul de a le permite, pe baza unui proces logic, de a-şi revizui estimațiile referitoare la probabilitățile de realizare a stărilor naturii.

Obținerea unor noi informații, în general pe bază experimentală, contribuie la reducerea

gradului de incertitudine care îşi pune amprenta asupra procesului decizional. Ca urmare, etapele clasice ale procesului decizional pot înregistra anumite modificări, ele putând fi ordonate astfel:
- definirea problemei decizionale şi formularea modelului decizional asociat acesteia;
- analiza anterioară, unde pe baza experienţei acumulate şi a judecăţilor individuale, decidentul estimează probabilităţile (subiec-tive) de apariţie a evenimentelor şi rezolvă problema decizională printr-una din metodele disponibile.

În cazul în care soluţia obţinută este acceptată de decident, ea este adoptată şi aplicată în practică, în caz contrar decidentul va face un demers pentru obţinerea de noi informaţii necesare reducerii gradului de incertitudine în scopul obţinerii unei soluţii mai eficiente.
- etapa analizei pre-posterioare-în care decidentul verifică dacă includerea informaţiei suplimentare aduce o îmbunătăţire a performanţelor sistemului, în raport cu decizia adoptată în etapa anterioară;
- culegerea(obţinerea) datelor suplimentare;
- analiza posterioară – în urma căreia rezultatele cercetării vor putea fi înglobate în analiza problemei;
- adaptarea soluţiei conform criteriului lui Bayes, după înglobarea informaţiei suplimentare.

Bibliografie

[1] **Bădescu A**., **Dobre I.** *Modelarea deciziilor economico-financiare*, Editura Conphys, Bucureşti, 2001

[2] **Frois G.A.** *Dynamique économique*, Dalloz, Paris 2002

[3] **Lumby S.** *Investment apraisal and financial decisions*, Chapman and Stall, London, 1994

[4] **Nguéna O.J.** *Microéconomie de l'incertaine*, Dunod, Paris, 2001

[5] **Purcaru I.** *Matematică şi Asigurări,* Editura Economică, Bucureşti, 1995

[6] **Stancu S., Mihail N**. *Decizii economice în condiţii de incertitudine*, Editura Economică, Bucureşti, 2005

[7] **Stancu S., Huidumac C.** *Teoria Portofoliilor-cu aplicaţii pe piaţa financiară*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1999

[8] **Taylor G.** *The incidence of risk under credit insurance,* 1993

www.casact.org/library/astin

www.xprimm.ro

www.1asig.ro

Raport anual 2001, 2002, 2003, 2004 privind desfăşurarea şi evoluţia pieţei de asigurări