# Negotiation model as a rationality test instrument

Lect. Ovidiu VEGHEŞ
Catedra de Matematică, A.S.E. Bucureşti

*The paper presents the bargaining model Stahl-Rubinstein. We study the Pareto optimum of a non-cooperative game and the perfect Nash equilibrium in sub-games. It is proposed a way of testing the rationality of a player by using the described bargaining model as an instrument.*
***Keywords:*** *bargaining, game, perfect information, Nash equilibrium, rationality test.*

Rezultatul unei negocieri este pus adesea pe seama abilităţii de negociere a părţilor implicate. Modelarea matematică a acestui proces pleacă de la ipoteza că rezultatul, reciproc acceptat de părţi, este raţional pentru fiecare parte (nu este mai dezavantajos decât un dezacord) şi Pareto optimal (nu exista un alt acord preferat de ambele părţi). Restrângând contextul la situaţiile în care interesele părţilor sunt antagoniste (cooperarea nefiind posibilă) suntem interesaţi şi de o "imunizare" a rezultatului atât la "ispita" devierilor individuale cât şi la prevenirea regretelor ulterioare. Proprietatea de stabilitate menţionată cere rezultatului să fie un echilibru Nash. Aceste trei deziderate urmărite într-un proces de negociere pot fi considerate ca definind raţionalitatea părţilor implicate. Diferenţa dintre rezultatele obţinute în practică şi cele normative prevăzute teoretic poate fi văzută ca o "orbire" a raţionalităţii, iar abilitatea de negociere se reduce la efortul de păstrare a raţionalităţii.

A.Rubinstein (1982) extinde rezultatele lui I.Ståhl (1972) privind negocierea având orizont de timp finit. Menţionăm şi comentariile şi dezvoltările lui K.Binmore (1987) aduse următorului context general de negociere: doi indivizi (i=1,2) vor să împartă un bun omogen divizibil (o porţiune de teren, o sumă de bani sau, de ce nu, o prăjitură). Dacă înţelegerea nu survine în perioada t, t=1,2,... bunul nu se împarte, iar în caz contrar procesul se încheie cu împărţirea $(x_{1,t}, x_{2,t})$, unde $x_{i,t} \geq 0$ este partea care îi revine individului i (i=1,2), în acord cu condiţia de completitudine $x_{1,t} + x_{2,t} = 1$. Dacă partajarea are loc în perioada t gradul de satisfacţie al individului i=1,2 este $\delta_i^{t-1} x_{i,t}$ unde $\delta_i \in (0,1)$ este un factor de actualizare fixat propriu individului i într-o perioadă, iar dacă partajarea nu are loc, gradul de satisfacţie este 0. Procesul de negociere este dinamic, infinit repetat şi se desfăşoară astfel:

- În perioadele impare, jucătorul 1 propune o împărţire a bunului i în proporţia $x_{1,2k+1}$ pentru sine şi $1 - x_{1,2k+1}$ pentru jucătorul 2, iar în perioadele pare, jucătorul 1 primeşte propunerea jucătorului 2, o acceptă sau o respinge. În cazul în care o va respinge, atunci va face la rândul său propunerea de împărţire a sumei în perioada următoare;
- În perioadele impare, jucătorul 2 primeşte propunerea jucătorului 1, o analizează, şi fie o acceptă, fie o respinge. În cazul în care o va respinge, atunci va face la rândul său o propunere de împărţire a sumei, în perioada următoare $(x_{1,2k+2}, 1 - x_{1,2k+2})$; unde $k \in \mathbf{N}$.

În cazul acestui joc dinamic avem informaţie perfectă deoarece jucătorii ştiu istoria jocului în fiecare moment. Acceptăm ideea de negociatori total raţionali care vor să-şi maximizeze propria satisfacţie. Deoarece ceea ce îl va satisface pe unul dintre jucători nu îl va satisface pe celălalt, interesele lor sunt conflictuale. Suntem interesaţi de rezultatele normative.

**Propoziţia 1**.(Echilibre Nash simple) Toate partajările optimale Pareto se realizează în prima perioadă (t=1) şi sunt echilibre Nash pentru un anumit cuplu de strategii.

**Demonstraţie**. Fie $(y_1, y_2)$ cu $y_1, y_2 \geq 0$ şi $y_1 + y_2 = 1$ partajarea bunului în urma negocierii. Gradul de satisfacţie este maxim dacă ea este rezultatul primei perioade deoarece

$\delta_i \in (0,1)$, i=1,2. Nu există un acord cu grad mai mare de satisfacție pentru ambele părți, decât ca rezultat al primei perioade de negociere. Deci, toate partajările optimale Pareto se realizează în prima perioadă şi sunt de forma menționată.

Considerăm următoarele strategii: pentru jucătorul 1 propune $x_{1,1} = y_1$ şi $x_{1,2k+3} = 1$, $k \in \mathbf{N}$ şi respinge toate propunerile în perioade pare; pentru jucătorul 2 propune $x_{2,2k} = 1$, $k \in \mathbf{N}$ şi respinge toate propunerile în perioade impare (eventual cu excepția primei care este acceptată dacă se asigură câştigul minim $y_2$). Cu alte cuvinte, dacă partajarea nu s-a făcut în prima perioadă la $(y_1, y_2)$, fiecare jucător cere bunul în totalitate şi refuză toate propunerile celuilalt.

Dacă jucătorul 2 este fixat asupra acestei strategii, orice abatere a jucătorului 1 de la strategia menționată îi scade satisfacția jucătorului 1. Într-adevăr, dacă jucătorul 1 propune mai puțin în prima perioadă, jocul se încheie cu o satisfacție mai mică, iar dacă cere mai mult, nu mai obține nimic şi satisfacția este 0. Dacă jucătorul 1 este fixat asupra acestei strategii, orice abatere a jucătorului 2 de la strategia menționată îi garantează satisfacția 0 în caz de refuz la prima ofertă şi nu îi îmbunătățeşte satisfacția în caz de acceptare. Deci toate partajările de forma menționată, realizate în prima perioadă şi sunt echilibre Nash.

**Observație**. Trebuie remarcat că aceste echilibre nu sunt toate credibile datorită factorului de actualizare subunitar. În caz de dezacord la prima perioadă o primă propunere a jucătorului 2 cu $x_{12} \in (\delta_1, 1)$ acceptată, va asigura o satisfacție $\delta_1 x_{12}$ superioară satisfacției $\delta_1^2$ de obținere a întregului bun în perioada a treia şi superioară satisfacției 0 a strategiei menționate. Amenințarea jucătorului 1 de a-şi restrânge spațiul de manevră la strategia menționată nu e credibilă. Asemănător, amenințarea jucătorului 2 cu strategia menționată nu e credibilă (dezacordul din primele două perioade face ca o propunere a jucătorului 1 cu $x_{23} \in (\delta_2, 1)$, acceptată, să asigure o satisfacție $\delta_2^2 x_{23}$ superioară satisfacției $\delta_2^3$ de obținere a întregului bun în perioada a patra şi superioară satisfacției 0 a strategiei menționate). Echilibrele menționate nu sunt şi focale.

Noțiunea de echilibru perfect a fost introdusă de R.Selten (1975). Un echilibru perfect se obține atunci când strategiile planificate după toate istoriile posibile ale jocului (în fiecare subjoc) formează echilibre. Propoziția următoare arată că eliminarea amenințărilor necredibile conduce la o soluție unică. Partea corespunzătoare jucătorului 1 descreşte dacă el devine mai nerăbdător ($\delta_1$ scade) şi creşte dacă celălalt jucător devine nerăbdător ($\delta_2$ scade).

**Propoziția 2**.(Echilibre Nash perfecte) Există o singură partajare a bunului în urma negocierii $(y_1, y_2)$ cu $y_1 = \dfrac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ pentru jucătorul 1 şi $y_2 = \dfrac{\delta_2 - \delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ pentru jucătorul 2 rezultată dintr-un echilibru Nash perfect (conservat de subjocuri).

Demonstrație. Raționalitatea jucătorilor i=1,2 face ca ambii să adopte următoarea strategie (credibilă): "Dacă mi se dă mai mult decât cel mai bun câştig al meu din etapele următoare $\overline{w_i}$ accept oferta, altfel, dacă mi se dă mai puțin decât cel mai rău câştig al meu din etapele următoare $\underline{w_i}$ resping oferta şi continuu jocul până la câştigul maxim al etapelor viitoare". Pragurile indică partea din bun aferentă jucătorului i actualizată la momentul luării deciziei.

Fie $\underline{y_1}$, respectiv $\overline{y_1}$, părțile cea mai mică, respectiv cea mai mare pe care le poate obține jucătorul 1, în procesul de negociere, într-un echilibru Nash perfect. Considerăm subjocul începând cu t=3 care începe printr-o ofertă a jucătorului 1 şi care are aceeaşi structură cu a jocului inițial, cu deosebirea că satisfacțiile trebuie actualizate. Deci, cea mai mică (mare) parte pe care o poate obține jucătorul 1 dacă va continua jocul în acest subjoc adoptând un echilibru perfect este $\underline{y_1}$

($\overline{y}_1$).
Ne fixăm atenția asupra perioadei 2. Toate propunerile jucătorului 2 care oferă jucătorului 1 o parte superioară sau egală cu $\delta_1 \overline{y}_1$ vor fi acceptate (Jucătorul 1 va fi indiferent între partea $\delta_1 \overline{y}_1$ din perioada 2 şi partea $\overline{y}_1$ obținută la etapa a 3-a). Dacă 2 nu va oferi niciodată mai mult de $\delta_1 \overline{y}_1$, atunci câştigul jucătorului 1 dacă va continua jocul atunci când jucătorul 2 face prima ofertă, respectând $\overline{w}_1$, este cel mult $\delta_1 \overline{y}_1$. Toate propunerile jucătorului 2 care oferă jucătorului 1 o parte inferioară sau egală cu $\delta_1 \underline{y}_1$ vor fi respinse.

Obținem $\delta_1 \underline{y}_1 \leq \underline{w}_1 \leq \overline{w}_1 \leq \delta_1 \overline{y}_1$ (i)

Fie $\underline{y}_2$ respectiv $\overline{y}_2$ părțile cea mai mică, respectiv cea mai mare pe care le poate obține jucătorul 2 în procesul de negociere, într-un echilibru Nash perfect, într-un subjoc în care el face prima propunere (cum este cel ce începe cu etapa a 2-a). Dacă toate propunerile făcute de jucătorul 2, inferioare lui $1-\overline{w}_1$ pentru sine şi superioare lui $\overline{w}_1$ pentru jucătorul 1, sunt acceptate de jucătorul 1, atunci cea mai mică parte a jucătorului 2 într-un echilibru Nash perfect nu poate fi nici inferioară lui $1-\overline{w}_1$ (justificarea se face prin reducere la absurd, situație în care jucătorul 2 este tentat să devieze realizând creşterea câştigului său la $1-\overline{w}_1$) şi, într-un raționament similar, nici superioară lui $1-\underline{w}_1$

$$1-\overline{w}_1 \leq \underline{y}_2 \leq \overline{y}_2 \leq 1-\underline{w}_1 \qquad \text{(ii)}$$

Ne fixăm atenția asupra perioadei 1 şi, din considerente analoage, obținem

$$\delta_2 \underline{y}_2 \leq \underline{w}_2 \leq \overline{w}_2 \leq \delta_2 \overline{y}_2 \qquad \text{(iii)}$$

$$1-\overline{w}_1 \leq \underline{y}_2 \leq \overline{y}_2 \leq 1-\underline{w}_1 \qquad \text{(iv)}$$

Deducem în prima fază

$$\underline{y}_1 \overset{\text{(iv)}}{\geq} 1-\overline{w}_2 \overset{\text{(iii)}}{\geq} 1-\delta_2 \overline{y}_2 \overset{\text{(ii)}}{\geq} 1-\delta_2+\delta_2 \underline{w}_1 \overset{\text{(i)}}{\geq} 1-\delta_2+\delta_2\delta_1 \underline{y}_1$$

$$\overline{y}_1 \overset{\text{(iv)}}{\leq} 1-\underline{w}_2 \overset{\text{(iii)}}{\leq} 1-\delta_2 \underline{y}_2 \overset{\text{(ii)}}{\leq} 1-\delta_2+\delta_2 \overline{w}_1 \overset{\text{(i)}}{\leq} 1-\delta_2+\delta_2\delta_1 \overline{y}_1$$

iar în a doua că

$$\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} \leq \underline{y}_1 \leq \overline{y}_1 \leq \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} \Rightarrow$$

$$y_1 = \underline{y}_1 = \overline{y}_1 = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}.$$

În mod analog $y_2 = \underline{y}_2 = \overline{y}_2 = \dfrac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}$, $\underline{w}_1 = \overline{w}_1 = \dfrac{\delta_1-\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$, iar $\underline{w}_2 = \overline{w}_2 = \dfrac{\delta_2-\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$.

Un echilibru perfect în subjoc va fi următorul: „jucătorul i va cere proporția $\dfrac{1-\delta_j}{1-\delta_i\delta_j}$ atunci când îşi face oferta şi va accepta orice proporție mai mare sau egală cu $\dfrac{\delta_i-\delta_i\delta_j}{1-\delta_i\delta_j}$, respectiv va refuza orice proporție mai mică". Detaliind strategiile echilibrului Nash perfect:

- pentru jucătorul 1 în fiecare perioadă impară, dacă împărțirea nu a avut loc, propune $x_{1,2k+1} = y_1 = \dfrac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$, $k \in \mathbf{N}$, şi, în perioade pare, acceptă toate împărțirile cu $x_{1,2k} \geq w_1 = \dfrac{\delta_1-\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ şi respinge toate propunerile $x_{1,2k} < w_1$;
- pentru jucătorul 2 în perioade impare, acceptă toate împărțirile cu $x_{2,2k+1} \geq w_2 = \dfrac{\delta_2-\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ şi respinge toate propunerile $x_{2,2k+1} < w_2$, şi, în fiecare perioadă pară, dacă împărțirea nu a avut loc, propune $x_{2,2k} = y_2 = \dfrac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}$, $k \in \mathbf{N}$.

De aici rezultă că echilibrul perfect în subjoc este unic.

**Observație**. În condițiile în care jucătorul 1 va muta primul, atunci acesta este în avantaj. De exemplu, dacă $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ atunci $y_1 = \dfrac{1-\delta}{1-\delta^2} = \dfrac{1}{1+\delta} > \dfrac{1}{2}$, deci 1 poate obține mai mult de jumătate din câştig. Pentru a obține un proces în care nici un jucător să nu fie privilegiat înainte de negociere putem să tragem la sorți cine este cel ce vorbeşte primul. Pe de altă parte, acest avantaj va dispărea dacă perioada $\Delta$ între etapele jocului va fi relativ mică. Într-adevăr

$$y_1 = \frac{1-\delta_2^{\Delta}}{1-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta}} \xrightarrow[\Delta\to 0]{} \frac{\ln\delta_2}{\ln\delta_1 + \ln\delta_2}$$

şi pentru $\delta_1 = \delta_2$ avantajul dispare, părțile împărțite de cei 2 jucători fiind egale.

**Bibliografie**

[1] Binmore K., Dasgupta P., The Economics of Bargaining, Basil Blackwell, 1987.
[2] Fudenberg D., Tirole J., Game theory, M.I.T. Press, 1991.
[3] Roman M., Jocuri şi negocieri, Ed. Aisteda, Bucureşti, 2000.
[4] Rubinstein A., Perfect equilibrium in a bargaining model, Econometrica **50**, 1982.
[5] Selten R., Re-examination of the Perfectness Concept for Echilibrium Points in Extensive Games, Internatinal Journal of Game Theory **4**, 1975.
[6] Shaked A., Sutton J., Involuntary unemployment as a perfect equilibrium in a bargaining game, Econometrica **52**, 1984.
[7] Ştefănescu A., Competitive models in game theory and economic analysis, Ed. Universitații din Bucureşti, 2000.