

Aplicatii ale teoriei haosului în economie

Conf.dr. Virginia MARACINE, prof.dr. Emil SCARLAT
Catedra de Cibernetica Economica,
Academia de Studii Economice Bucuresti

Chaos theory' discovery and the fractal geometry occurrence it's ones of the great achievements of the modern science, especially due to the heterogeneity of the domains in which they could be used. If since '70 the opinion that the evolutive processes are deterministic and predictable still persist, today the fact that those processes are stochastic at list (so unpredictable) it's a certainty: in the most frequent cases they are chaotic. This paper contains one of the possible applications of the chaos theory in economics: capital markets.

Key words: chaos, chaotic dynamics, fractals, fractal geometry, chaotic behavior of the capital markets.

În domeniul economic, prima încercare de aplicare a metodelor fractale a fost întreprinsa de Mandelbrot care, într-un articol din 1963, a investigat schimbarile de pret pe o piata deschisa. El a obtinut empiric faptul ca o reprezentare grafica a schimbarilor pretului pe piata bumbacului seamana cu o alta reprezentare în care timpul era luat la un alt nivel de rezolutie. Atunci i-a trecut prin minte ideea ca o astfel de invarianta de scala poate fi esentiala în caracterizarea multor fenomene complexe care se desfasoara în jurul nostru. Dupa 20 de ani el si-a concretizat ideea în geometria fractala care a devenit o metoda esentiala în multe domenii de activitate.

Acum, la aproape 40 de ani care au trecut de la aparitia ideii lui Mandelbrot, economia constituie unul dintre cele mai fertile domenii de aplicare a fractalilor si conceptelor teoriei haosului.

O serie de rezultate deosebit de promitatoare privind fluctuatiile preturilor în jurul punctului de echilibru, evolutia ratelor de schimb, legitatilor empirice care descriu fluctuatiile datelor macroscopice privind evolutia dimensiunilor companiilor s.a. sunt de natura sa arate ca o atare directie de dezvoltare a cercetarilor va unifica doua domenii care aveau foarte putine lucruri în comun.

În continuare, vom prezenta una dintre aplicatiile cele mai consolidate ale teoriei

haosului si geometriei fractale în economie.

1. Aplicatii ale teoriei haosului pe pietele de capital

Teoria si modelele privind functionarea pietelor de capital s-au dezvoltat initial pe baza ipotezei ca aceste pietele sunt eficiente (ipotezele pietelor eficiente cuprind o serie de conditii care, în esenta, spun ca preturile activelor si randamentul acestora pot fi determinate pornind de la cererea si oferta de pe piata competitiva pe care actioneaza agenti rationali). Acesti agenti rationali asimileaza rapid orice informatie care este relevanta pentru determinarea preturilor activelor si a randamentelor acestora si ajusteaza pretul în concordanta cu aceste informatii. Altfel spus, agentii nu au avantaje comparative diferite în achizitionarea de informatii. Rezulta ca pe o astfel de piata nu vor aparea oportunitati în ce priveste obtinerea unui profit de la un activ al carui randament este superior în concordanta cu riscul asumat de agent. Deci, profiturile normale vor fi egale cu zero, având în vedere ca agentii își procura aceasta informatie si o încorporeaza imediat în pretul activelor. Daca informatia trecuta si cea curenta este încorporata imediat în preturile activelor, atunci doar o noua informatie, sau cum se mai numeste aceasta, "noutatea", va putea determina schimbari de preturi.

Deoarece noutatile sunt, prin definitie, impredictibile, atunci schimbarile de preturi (sau în randamente) vor fi si ele impredictibile: nici o informatie de la momentul t sau anterioara acestui moment nu va putea ajuta la îmbunatatirea prognozelor privind preturile si randamentele (sau, echivalent, la reducerea erorilor de prognoza facute de agenti în aceasta privinta). Aceasta independenta a erorilor de prognoza fata de informatia anterioara se numeste proprietatea de octogonalitate si este larg utilizata în testarea ipotezei pietelor eficiente.

Deci, pe pietele eficiente preturile nu se vor modifica decât în conditiile în care apare o noua informatie care este prelucrata si utilizata de agenti. Numarul mare de agenti care sunt activi pe aceste pietele va face ca preturile sa fie corecte, deci ele sa reflecte raportul cerere-oferta de active.

În acest context, agentii sunt numiti rationali, adica ei stiu, într-un sens colectiv, care informatie este importanta si care nu. Apoi, dupa ce ei proceseaza aceasta informatie si evalueaza riscul încorporat, multimea agentilor prezenti pe piata gaseste un pret de echilibru. În esenta, ipotezele pietelor eficiente afirma, în aceasta privinta, ca piata este formata din prea multi agenti pentru a putea gresi.

Daca ipoteza numarului mare de agenti este adevarata, atunci schimbarile de pret care au loc astazi sunt determinate doar de noutatile de astazi. Noutatile de ieri nu mai sunt importante si preturile si randamentele actuale nu mai sunt legate de preturile si randamentele trecute.

Astfel spus, aceste variabile sunt independente, ele putând fi introduse ca variabile aleatoare.

Daca sunt disponibile suficiente date privind evolutiile aleatoare ale acestor variabile atunci, la limita (deci când numarul de observatii tinde catre infinit), putem admite ca distributia de probabilitate a acestor variabile este una normala. Aceasta ipoteza privind normalitatea preturilor si randamentelor permite aplicarea unui larg spectru de tehnici si metode de modelare eco-

nometrica, care domina astazi studiul cantitativ al pietelor de capital. Rezumând, ipotezele pietelor eficiente se refera, în esenta, la trei concepte de baza:

- i) Agenti rationali;
- ii) Pietele eficiente;
- iii) Traectorii aleatoare.

Aceasta viziune asupra pietelor de capital este, înca, nerealista cel puțin în doua privinte. În primul rând, este nerealista ipoteza privind independenta dintre agenti si active. Conform ipotezelor pietelor eficiente, agentii primesc informatia si se ajusteaza imediat la ea, reactionând într-o maniera, sa spunem, liniara. Deci pe masura ce informatia este primita, ea este prelucrta si introdusa în preturile activelor fara ca agentii sa ia în considerare ce se întâmpla cu preturile si randamentele altor active.

În al doilea rând, paradigma liniara presupune ca preturile si randamentele activelor sunt normal distribuite, ceea ce este iarasi destul de discutabil.

De fapt, ipotezele pietelor eficiente au fost introduse doar pentru a justifica utilizarea modelelor econometrice si a calculului probabilitatilor într-un domeniu economic în care ipoteza interdependentei observatiilor privind preturile activelor nu este adevarata.

Sintetizând, se poate spune ca principalele motive de respingere a ipotezelor pietelor eficiente sunt urmatoarele:

- 1) Investitorii nu sunt întotdeauna adversi fata de risc. Ei pot sa accepte riscul, mai ales atunci când sunt confruntati cu posibilitatea de a pierde daca nu joaca;
- 2) Investitorii au încredere mai mare în propriile lor prognoze decât în informatia pe care o primesc, deci atunci când stabilesc probabilitati subiective ei sunt subiectivi;
- 3) Agentii nu reactioneaza la o informatie imediat ce o primesc. În schimb, ei pot reactiona la ea dupa ce au primit-o daca se confirma o schimbare într-o tendinta recenta. Aceasta este, însa, o reactie neliniara, opusa reactiei liniare pe care se bazeaza conceptul de investitor rational;

4) Nu exista nici un motiv sa se creada ca investitorii organizati în grup sunt mai rationali decât cei individuali.

2. Metoda de analiza R/S

Metoda R/S este cea mai dezvoltata metoda existenta astazi în domeniul studiului pietelor de capital. Ea se bazeaza pe conceptul de *exponent Hurst*.

Hurst a fost un hidrolog ce a lucrat în Egipt la un proiect de regularizare a cursului fluviului Nil începând cu 1907, timp de 40 de ani. În cadrul acestui proiect, el s-a confruntat cu problema controlului nivelului apei în anumite bazine (rezervoare). Un rezervor ideal nu va ramâne niciodata gol, dar nici nu va deversa apa accidental. Trebuie deci aplicata o strategie care sa preserve o anumita cantitate de apa în fiecare an. Totusi, daca influxul de apa este prea scazut exista pericolul ca nivelul apei din rezervor sa devina prea scazut iar daca influxul de apa este prea mare, apare pericolul ca ea sa fie deversata si sa provoace inundatii. Hurst si-a pus întrebarea ce politica poate fi stabilita în asa fel încât rezervorul sa nu fie niciodata nici prea gol si nici prea plin.

Într-o astfel de situatie, raspunsul la întrebarea lui Hurst era constituirea unui model în care influxul de apa în bazin sa reprezinte o variabila aleatoare. Totusi, când Hurst a tratat o astfel de ipoteza, ea s-a dovedit falsa, astfel, ca a fost nevoie de o noua statistica, capabila sa modeleze comportamentul unui fenomen care, se pare, nu este aleator.

Pentru a introduce aceasta statistica adecvata comportamentului natural al fluxului de apa care intra în bazin, Hurst a masurat fluctuatiile nivelului rezervorului în jurul nivelului mediu si a constatat ca sirul de valori reprezentând aceste fluctuatii se schimba în raport cu lungimea intervalului de timp luat în considerare la masurare. Daca seria de date ar fi perfect aleatoare atunci acest sir de valori ar creste în acelasi timp cu cresterea radacinii patrate a timpului (regula \sqrt{T}). Pentru a putea compara date culese la diferite momente de timp,

Hurst a introdus un raport fara dimensiune, împartind seria de date analizata la abaterea standard a observatiilor fata de medie. S-a obtinut astfel o redimensionare a scalei, drept pentru care metoda se mai numeste si analiza R/S.

Hurst a demonstrat faptul ca multe fenomene naturale au o dinamica data de o „lege aleatoare modificata”. Asa sunt inundatiile, fluctuatiile de temperatura de-a lungul anului, ploile, petele solare s.a. care pot fi reprezentate în functie de modelul în care se comporta raportul R/S în timp. Metoda R/S consta în esenta din urmatoarele:

Se presupune ca avem o serie dinamica initiala, reprezentând evolutia unui fenomen sau proces natural. Pornind de aici se determina marimea:

$$X_{t,N} = \sum_{k=1}^t (x_k - m_N) \quad (1)$$

unde: $X_{t,N}$ - abaterea cumulata pe N perioade; x_k - componenta k a seriei dinamice; m_N - media valorilor x_k pe N perioade.

N poate fi luat egal cu numarul total de observatii (dar nu în mod obligatoriu) iar $t \leq N$.

În pasul urmator se determina marimea:

$$R = \text{Max}(X_{t,N}) - \text{Min}(X_{t,N})$$

deci diferenta dintre nivelul maxim si cel minim, atinse de marimile $X_{t,N}$.

Pentru a putea compara diferite serii dinamice, Hurst împarte marimea R la abaterea standard a observatiilor initiale, deci la:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - m_N)^2} \quad (2)$$

unde x_i sunt termenii seriei dinamice initiale, $i = 1, N$;

m_N - media tuturor termenilor seriei dinamice.

Se determina apoi raportul:

$$\frac{R}{S} = \frac{\text{Max}(X_{t,N}) - \text{Min}(X_{t,N})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i - m_N}} \quad (3)$$

Hurst a observat ca acest raport creste pe masura ce creste N , deci numarul de observatii din seria de date initiala. Daca seria de date ar fi perfect aleatoare, atunci raportul ar creste proportional cu radacina patrata a numarului de observatii, \sqrt{N} . Pentru a masura dependentă cresterii raportului R/S de timpul de observare a fenomenului, Hurst utilizeaza relatia:

$$\frac{R}{S} = (a \cdot N)^H \quad (4)$$

unde: a este o constanta de proportionalitate iar H - exponentul Hurst.

Când Hurst a aplicat aceasta relatie la observatiile privind inundatiile pe fluviul Nil, el a gasit ca $H = 0,9$. Încercând si cu alte serii dinamice, în general H a fost gasit mai mare ca $0,5$. Concluzia este ca observatiile respective nu sunt independente, deci ele nu îndeplinesc o conditie de baza pentru a fi aleatoare. Fiecare termen al seriei dinamice contine deci o memorie a tuturor evenimentelor trecute, aceasta nefiind însa memoria pe termen scurt de la un termen la altul, ci una pe termen lung. Evenimentele recente au un impact mai mare asupra observatiilor curente, în timp ce evenimentele mai îndepartate au un impact mai mic, dar pastreaza înca o influenta reziduala.

În concluzie, un sistem dinamic este rezultatul unui lung sir de evenimente interconectate. Ceea ce se întâmpla astazi este rezultatul a ceea ce s-a întâmplat în trecut si, în acelasi timp, influenteaza viitorul.

O astfel de viziune este opusa celei economice în care se presupune ca seriile dinamice sunt independente de timp. Dar, dupa cum am vazut, timpul este o variabila iterativa.

În statistica Hurst se poate masura influenta prezentului asupra viitorului utilizând un coeficient de corelatie C dat de relatia:

$$C = 2^{(2H-1)} - 1 \quad (5)$$

Se observa ca daca $H = 0,5$ atunci $C = 0$, deci evenimentele sunt perfect aleatoare si variabilele temporale sunt necorelate.

Astfel spus, prezentul nu influenteaza viitorul. Functia densitate de probabilitate asociata evenimentelor poate fi cea normala sau orice alta distributie de probabilitate;

Daca $0 \leq H < 0,5$ atunci $C < 0$, deci evenimentele sunt corelate negativ în timp. Acest tip de serie dinamica se numeste *antipersistenta*, astfel ca daca un termen (observatie) din serie a crescut, cel mai probabil ca va urma, la momentul de timp urmator, o scadere a sa. Intensitatea comportamentului antipersistent depinde de apropierea lui H de zero. Când $H = 0$, $C = -0,5$ si o serie în acest caz este extrem de volatila, cunoscând rasturnari frecvente. Astfel de cazuri se întâlnesc, totusi, mai rar în economie.

Când $0,5 < H \leq 1$, coeficientul de corelatie C ia valori pozitive si spunem ca avem o serie dinamica *persistenta* în sensul ca daca o valoare a crescut (scazut) în perioada anterioara atunci ea, cu o probabilitate mare, va creste (scadea) în continuare. Intensitatea comportamentului persistent depinde de valoarea lui H . Când H tinde catre 1 si C tinde catre 1.

Seriile dinamice se întâlnesc în natura si economie. Dupa o perioada în care a fost timp frumos, probabilitatea ca si în continuare sa fie timp frumos este mai mare decât probabilitatea ca timpul sa se schimbe. Într-o economie, daca inflatia a fost mare, probabilitatea ca si în continuare inflatia sa fie mare excede probabilitatea ca inflatia sa devina mica.

Seriile dinamice persistente, deci pentru care $0,5 < H \leq 1$, sunt fractale, ele fiind de fapt miscari browniene functionale, deci în care exista o corelatie între evenimente de-a lungul timpului. Datorita acestei corelatii între evenimente, probabilitatea ca doua evenimente sa urmeze unul altuia nu mai este egala cu $0,5$.

Exponentul Hurst reprezinta probabilitatea ca doua evenimente asemanatoare sa apara consecutiv. Deoarece fiecare aparitie a unui eveniment nu mai este egal probabila ca în cazul seriilor dinamice perfect alea-

toare, dimensiunea distributiei de probabilitate a evenimentelor persistente nu mai este egala cu 2 ci cu un numar între 1 si 2; astfel spus ea este fractala.

Mandelbrot a observat primul ca între dimensiunea fractala si exponentul Hurst exista un raport invers proportional. În cazul unei serii aleatoare, pentru care $H = 0,5$, evident ca dimensiunea fractala este $D = 2$. Daca $H = 0,7$ dimensiunea fractala este $D = 1,43$ s.a.m.d.

Când $H = 1$, deci seria dinamica este compusa din termeni identici, $D = 1$, altfel spus, dimensiunea unui segment de dreapta, ceea ce este perfect adevarat.

3. Modelul K-Z al lui Larrain

M. Larrain a elaborat un model ce combina o descriere clasica a unei economii Keynesiene cu un model neliniar bazat pe evolutia ratelor dobânzilor. Deoarece el a denumit modelul comportamental aplicatia Z si modelul neliniar aplicatia K, a rezultat asa-numitul model K-Z.

Larrain introduce separat cele doua componente. Astfel, el observa ca ratele viitoare ale dobânzilor pe pietele de capital depind atât de ratele trecute ale dobânzilor (conceptia analizei tehnice):

$$r_{t+1} = f(r_{t-n}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

unde f este o functie neliniara, cât si de o serie de variabile economice fundamentale (conceptia fundamentalista):

$$r_{t+1} = g(Z) \quad (7)$$

unde $Z = (y, M, P, \dots)$, y fiind PNB real, M - oferta de bani, P - indicele preturilor consumatorilor etc.

$$r_{t+1} = a - br_t^n(1 - r_t) + dy_t + eP_t - f \cdot M_t - g \sum_t (Y_t - c_t) \quad (10)$$

Aceasta expresie arata ca ratele viitoare ale dobânzilor sunt o functie combinata de factori tehnici si fundamentali. În timp, una sau alta dintre cele doua componente poate sa o domine pe cealalta. Astfel, în timpul perioadelor de stabilitate, pietele de capital sunt eficiente si ratele dobânzilor vor fi dependente într-o masura mai mare de componenta Z. În perioadele de instabilitate ale pietelor respective, investitorii își pierd încrederea în variabilele fundamen-

Componenta (6) arata ca rata viitoare a dobânzii depinde de ratele anterioare ale acesteia pâna la un anumit lag n . Aceasta dependenta a marimilor viitoare de cele trecute este specifica conceptiei analizei tehnice de abordare a pietelor de capital. Forma exacta a lui $f(r_{t-m})$ nu este cunoscuta, ea putând fi diferita de la analist la analist.

Larrain alege pentru aceasta functie o expresie de forma:

$$r_{t+1} = a + br_t^n - cr_t^{n+1}$$

în care se observa ca daca $b = c$ devine ecuatie logistica, despre care stim ca are un comportament haotic pentru anumite valori ale parametrului de control b (sau c):

$$r_{t+1} = a - br_t^n(1 - r_t) \quad (8)$$

Aceasta reprezinta componenta (aplicatia) K a modelului.

În continuare este construita componenta Z de forma:

$$r_{t+1} = dy_t + eP_t - f \cdot M_t - g \sum_t (Y_t - c_t) \quad (9)$$

unde d, e, f, g sunt constante iar y_t reprezinta PNB real, M_t - oferta de bani (exprimata prin agregatul $M2$), P_t indicele preturilor de consum, Y_t venitul personal real iar c - consumul personal real.

Aceasta componenta reflecta conceptia fundamentalista conform careia ratele dobânzii pe pietele de capital depind de evolutia unor marimi fundamentale.

Larrain combina cele doua componente, K si Z într-o singura expresie de forma:

tale, ei luând decizii în mai mare masura prin extrapolarea tendintelor. Astfel, componenta K devine dominanta.

În aceasta situatie, în anumite conjuncturi, parametrul de control c poate lua valori în intervale pentru care ecuatie logistica are un comportament haotic, inducând astfel pe pietele respective episoade de criza si haos.

Testele realizate cu modelul lui Larrain au dus la o serie de concluzii interesante. Ast-

fel, pentru pietele de capital stabile, cum ar fi piata obligatiunilor corporatiilor sau piata bonurilor de tezaur, prognozele obtinute au acoperit destul de bine evolutiile ratelor dobânzilor observate în realitate, ceea ce pentru un astfel de model reprezinta un succes. Totusi, modelul a utilizat, pentru estimarea parametrilor ecuatiilor (10), tehnici de regresie liniara ceea ce a anulat premiza ca una sau alta dintre cele doua componente poate sa domine într-o perioada sau alta.

Pentru a introduce o astfel de alternanta a dominatiei componentelor aplicatiei $K-Z$ este necesar ca parametrii functiei respective sa fie variabili în timp, ceea ce modelul în forma sa initiala nu permite.

Perfectionarea unui astfel de model ar putea reconcilia cele doua mari tendinte în analiza pietelor de capital, tehnica si fundamentalista, oferind un instrument puternic de prognoza a acestor pietele.

Bibliografie:

- Brock, William A. and Mallaris, A. G. (1989) *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, Advanced Textbooks in Economics Volume 27 (Amsterdam: North-Holland Publishing Company);
- Creedy, John and Martin, Vance L. (eds.) (1994) *Chaos and Non-Linear Models in Economics* (Cheltenham: Edward Elgar);
- Day, Richard Hollis (1994) *Complex Economic Dynamics Volume I: An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms* (Cambridge, MA: The I. T. Press);
- Medio, Alfredo and Gallo, Giampaolo (1993) *Chaotic Dynamics: Theory and Applications in Economics* (Cambridge University Press);
- Peters, Edgar E. (1991) *Chaos and Order in Capital Markets* (New York, NY: John Wiley and Sons).