

Analiza multirezolutie pentru compresia/decompresia datelor

Prof.dr. Luminita STATE, Universitatea Pitesti
Asist.drd. Catalina COCIANU, A.S.E. Bucuresti

*Analiza multirezolutie a unui semnal uni sau bidimensional, se bazeaza pe doua tipuri de operatori: de discretizare si de reconstructie. Operatorul de discretizare ofera informatia discreta necesara relativ la functia considerata si este determinat de forma acesteia. Operatorul de reconstructie realizeaza operatia inversa, de aproximare a unei functii necunoscute pe baza unei multimi discrete reprezentând valorile functiei pe o multime de puncte data. Algoritmul propus utilizeaza drept operator de discretizare medierea iar, ca predictor aplicat vectorului de rezolutie inferioara, valoarea medie a polinomului de gradul II obtinut prin metoda *wlms* considerând 5 puncte din vecinatatea celui pentru care se realizeaza aproximarea.*

Cuvinte cheie: analiza multirezolutie, compresie/decompresie, predictor, metoda *wlms*.

Transformari multirezolutie. Algoritmul general de codificare/decodificare

Fie F un spatiu de functii si D_k un proces de discretizare, unde k reprezinta rezolutia utilizata în procesul de discretizare. Pentru fiecare $f \in F$, imaginea operatorul D_k este o multime de numere reale $v^k = D_k(f)$. Operatorul D_k este deci definit conform relatiei $D_k : F \rightarrow V^k$, unde V^k reprezinta imaginea obtinuta prin operatorul D_k .

O transformare multirezolutie este o corespondenta bijectiva între doua multimi, una obtinuta în urma procesului de discretizare si cealalta obtinuta în urma rearanjarii primei multimi dupa criteriile multirezolutie a informatiei. Pentru a defini o astfel de transformare este necesara definirea unui operator de reconstructie adecvat $R_k : V^k \rightarrow F$. Daca operatorii de discretizare si reconstructie sunt alesi adecvat, imaginea transformarii $R_k D_k$ prin f reprezinta o aproximare a functiei f din spatiul F . Pentru aceasta este necesara verificarea unei relatii de consistenta (RC) impuse operatorilor R_k si D_k , si anume: $R_k D_k v^k = v^k$, pentru orice $v^k \in V^k$, adica $R_k D_k = I_k$, deci R_k reprezinta inversa la dreapta corespunzatoare operatorului D_k , în care I_k este identitatea pe multimea V^k .

Reprezentarea multirezolutie a informatiei discrete este realizata utilizând doi operatori de transfer, si anume un operator de de-

cimare, notat D_k^{k-1} , respectiv un operator de predictie, notat P_{k-1}^k [5].

Observatie Operatorul de decimare D_k^{k-1} este linear si determina obtinerea unei informatii discrete cu nivel de rezolutie mai scazut pe baza informatiei existente la nivelul imediat superior (transformarea de la nivelul de rezolutie k la nivelul de rezolutie $k-1$). Operatorul de predictie P_{k-1}^k calculeaza valorile aproximative corespunzatoare informatiei discrete din nivelul superior (cel de rezolutie k) pe baza informatiei existente la nivelul inferior, de rezolutie $k-1$.

Formal, cei doi operatori sunt definiti conform relatiilor:

$$D_k^{k-1} : V^k \rightarrow V^{k-1} \text{ si } P_{k-1}^k : V^{k-1} \rightarrow V^k$$

Fie R_k si D_k doua multimi de operatori care verifica relatia de consistenta (RC), pentru fiecare nivel de rezolutie k . În aceste conditii, operatorul de transfer D_k^{k-1} este definit conform relatiei $D_k^{k-1} = D_{k-1} R_k$. Definitia operatorului D_k^{k-1} nu depinde de alegerea multimii de operatori R_k daca si numai daca are loc: $D_k f = 0 \Rightarrow D_{k-1} f = 0$ pentru orice $f \in F$.

Aceasta proprietate este tot de tip consistenta si poate fi descrisa intuitiv astfel: informatia existenta la un nivel de rezolutie mai mica nu este sensibil mai bogata decât infor-

matia continuta la nivelul imediat superior.

Operatorul P_{k-1}^k poate fi definit în aceeași manieră, astfel: $P_{k-1}^k = D_k R_{k-1}$. Operatorul $D_k^{k-1} P_{k-1}^k : V^{k-1} \rightarrow V^{k-1}$ are proprietatea:

$$D_k^{k-1} P_{k-1}^k = D_{k-1} R_k D_k R_{k-1} = D_{k-1} R_{k-1} = I_{V^{k-1}},$$

adică o proprietate de consistență care demonstrează surjectivitatea operatorului

$D_k^{k-1} P_{k-1}^k : V^{k-1} \rightarrow V^{k-1}$. Operatorul $P_{k-1}^k D_k^{k-1} : V^k \rightarrow V^k$ ofera

$$D_k^{k-1} Q_k = D_k^{k-1} (I_{V^k} - P_{k-1}^k D_k^{k-1}) = D_k^{k-1} - \underbrace{D_k^{k-1} P_{k-1}^k D_k^{k-1} D_k^{k-1} P_{k-1}^k}_{= I_{V^k} 0} = I_{V^k} 0$$

adică vectorul e^k aparține anulatoarelor operatorului $D_k^{k-1} N(D_k^{k-1}) = \{v \mid v \in V^k, D_k^{k-1} v = 0\}$. Dacă $N_k = \dim(N(D_k^{k-1}))$, vectorul v^k are N_k elemente, vectorul v^{k-1} are N_{k-1} elemente, deci vectorul $d^k := v^k - P_{k-1}^k v^k$ are $N_k - N_{k-1}$ elemente.

Relațiile anterioare exprimate în termenii vectorului e^k indică faptul că există informație redundantă, care trebuie eliminată. Pentru aceasta, eroarea e^k va fi exprimată într-o bază din spațiul $N(D_k^{k-1})$. Vom nota cu $d_k^j, j = 1, \dots, N_k - N_{k-1}$ coeficienții vectorului e^k (numiți și *detalii*) în această bază. Determinarea coeficienților independenți la reducerea rezoluției se realizează pe baza unui sistem linear în necunoscutele $d_k^j, j = 1, \dots, N_k - N_{k-1}$.

Detaliiile

o aproximare a vectorilor $v^k \in V^k$, utilizând informația corespunzătoare nivelului $k-1$, adică a vectorilor $D_k^{k-1} v^k$.

Vectorul eroarea de aproximare e^k este dat de relația:

$$e^k := (I_{V^k} - P_{k-1}^k D_k^{k-1}) v^k := Q_k v^k.$$

Se remarcă faptul că $e^k \in V^k$ și

$d_k^j, j = 1, \dots, N_k - N_{k-1}$ reprezintă "abilitate" metodei de a produce valorile exacte ale funcției. Dacă se aplică o procedură de reconstrucție inadecvată, se obțin detalii mari, care nu pot fi eliminate prin intermediul unei funcții prag convenabile, deci semnalul de intrare poate fi recuperat cu condiția păstrării detaliilor. Scopul metodelor de compresie/decompresie de date bazate pe analiza multirezoluție este de a aplica operatori de reconstrucție adecvați astfel încât detaliile obținute să se situeze sub un prag dat, deci care pot fi eliminate fără pierdere semnificativă de informație.

Multimea operatorilor de transfer D_k^{k-1} și

P_{k-1}^k definesc o transformare multirezoluție.

Conform relațiilor enunțate anterior, algoritmi generici de codificare, respectiv decodificare sunt [5]:

Codificarea

$$v^L \rightarrow M v^L$$

$$\begin{cases} \text{pentru } k = L, L-1, \dots, 1 \\ v^{k-1} = D_k^{k-1} v^k \\ d^{k-1} = v^{k-1} - P_{k-1}^k v^{k-1} \end{cases}$$

$$M v^L = (v^0, d^0, d^1, \dots, d^{2^L-1})$$

Sunt eliminate din $M v^L$ detaliile aflate sub un prag dat.

$$M v^L \rightarrow M^{-1} M v^L$$

$$\begin{cases} \text{pentru } k = 1, 2, \dots, L \\ v^k = d^k + P_{k-1}^k v^{k-1} \end{cases}$$

Decodificarea

Se observa ca, daca $v^k = D_k f$, atunci vectorul eroare de aproximare poate fi exprimat

$$e^k = (I_{V^k} - P_{k-1}^k D_k^{k-1}) v^k = (D_k - P_{k-1}^k D_k^{k-1} D_k) f = (D_k - D_k R_{k-1} D_{k-1} R_k D_k) f$$

Cum $R_k D_k = I_{V^k}$, $R_{k-1} D_{k-1} = I_{V^{k-1}}$, rezulta:

$$e^k = D_k (I_{V^k} - I_{V^{k-1}}) f$$

Reprezentarea vectorului eroare de aproximare indica relatia strânsa dintre calitatea operatorului de predicție și proprietățile algoritmului de compresie/decompresie.

Relatia existenta între operatorul de predicție și cel de decimare ofera multiple posibilitati de constructie a schemelor multirezolutive. Astfel, în cazul operatorului P_{k-1}^k poate fi utilizata o metoda de predicție lineara, echivalent cu utilizarea transformarilor wavelet biortogonale (în acest caz operatorul $R_k D_k$ reprezinta o proiectie) sau se poate folosi o schema nelineara.

În acest context, problema compresiei/decompresiei de date poate fi formulata în termenii teoriei aproximărilor: *fiind data aproximarea funcției semnal f în rezoluție $k-1$, se cere să se determine o aproximare "buna" (cu o eroare aflata sub un prag maxim acceptat) a lui f în rezoluție k .*

Estimarea funcției f utilizând metoda celor mai mici patrate

Fie $I = [a, b]$, $f : I \rightarrow R$ semnal unidimensional, grila $X = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = b\}$ și partiția corespunzătoare acesteia $I_{i+1} = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. De asemenea, se va nota cu $Dx_i = x_{i+1} - x_i$ lungimea intervalului I_{i+1} și cu $Dx = \max_{i=0, \dots, N-1} Dx_i$.

Se presupun cunoscute valorile medii $\bar{f}_i = \frac{1}{Dx_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ corespunzătoare partiției

I_i , $1 \leq i \leq N$. Fiecarei valori medii \bar{f}_i i se asociază o pondere, notată w_i .

Fiecarui punct i , $1 \leq i \leq N$ i se asociază o mulțime de puncte vecine lui x_i în grila X

conform relației:

$E(i) = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\}$, respectiv fiecarui interval I_i , $1 \leq i \leq N$ i se asociază o mulțime de intervale vecine cu I_i $\tilde{E}(i) = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_l}\}$. Pentru aceste mulțimi este determinat un polinom $q^i(x)$ de grad k , $k > \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor$, care verifică relațiile:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^l [\bar{f}_j - \bar{q}_j^i]^2 w_j < \sum_{j=1}^l [\bar{f}_j - \bar{p}_j^i]^2 w_j \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} q_i(x) dx = \bar{f}_i \end{cases}$$

pentru orice polinom $p^i(x)$ de grad k , unde $\int_{x_{i-1}}^{x_i} q^i(x) dx = \bar{q}_j^i$ și $\int_{x_{i-1}}^{x_i} p^i(x) dx = \bar{p}_j^i$.

Polinomul $q^i(x)$ de grad k este calculat dacă se cunosc coeficienții z_0, z_1, \dots, z_k din dezvoltarea

$q^i(x) = \sum_{t=0}^k z_t x^t$. Aceștia sunt determinați din relațiile

$\frac{\partial S}{\partial z_t} = 0$, $t = 0, \dots, k$, unde

$$S = \sum_{j=1}^l [\bar{f}_j - \bar{q}_j^i]^2 w_j$$

Aproximarea ENO

Calitatea unei metode de aproximare este legată de structura matricei utilizate pentru interpolare și depinde de utilizarea unor puncte care aparțin aceleiași regiuni de regularitate. Ideea care stă la baza construcției stencil-ului este aceea de a evita intervalele care conțin singularități. În general, lungimea unui stencil este fixă. Deci rămâne de stabilit care sunt indicii r și s care specifică punctele marginale pentru vecinii intervalului considerat pentru interpolare ($I_{i+1} = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$). Un sten-

cil este fixat daca sunt determinati cei doi indici.

Problema care trebuie rezolvata pentru determinarea unui stencil adecvat este aceea a obtinerii unor indicatori de calitate care sa caracterizeze cât mai exact posibil zonele de

regularitate. Indicatorii utilizati uzual sunt definiti de diferentele divizate [1],[2].

În continuare se va lucra cu urmatoarele definitii ale diferentelor divizate corespunzatoare unei functii V :

$$\begin{cases} V[x_i] = V(x_i) \\ V[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+j-1}] = \frac{I}{x_{i+j-1} - x_{i-1}} (V[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}] - V[x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-2}]), j \geq 1 \end{cases}$$

Diferentele divizate corespunzatoare valorilor medii pe intervale pentru derivata functiei V sunt definite astfel:

$$\begin{cases} \bar{v}[x_i] = \bar{v}(x_i) \\ \bar{v}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] = \frac{I}{x_{i+j} - x_i} (v[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}] - v[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]), j \geq 1 \end{cases}$$

Proprietatea care fundamenteaza utilizarea diferentelor divizate ca indicatori ai zonelor de regularitate este urmatoarea

$$V[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] = \frac{V^{(j)}(\mathbf{x})}{j!}, \quad \mathbf{x} \in [x_i, x_{i+j}]$$

Aceasta relatie are loc numai în zonele de regularitate ale functiei, deci diferentele divizate corespunzatoare zonelor grilei care nu contin singularitati sunt mici.

Fie P polinomul de grad k ce interpoleaza functia V pe baza a $k+1$ puncte ale grilei si $p=P'$. Conform formulei Newton a interpolarii Lagrange, polinoamele P si p sunt date de relatiile:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{j=1}^k V[x_{i-r}, \dots, x_{i+j-r}] \sum_{m=0}^{j-1} (x - x_{i-r+m}) \\ p(x) &= \sum_{j=1}^k V[x_{i-r}, \dots, x_{i+j-r}] \sum_{\substack{m=0 \\ l \neq m}}^{j-1} \prod_{l=0}^{j-1} (x - x_{i-r+l}) \end{aligned}$$

Relatia care defineste polinomul p utilizeaza diferente divizate de ordin cel puțin 1 (pentru $j=1$,

$\sum_{\substack{m=0 \\ l \neq m}}^{j-1} \prod_{l=0}^{j-1} (x - x_{i-r+l}) = 0$), deci calculul

polinomului p nu necesita calculul valorilor functiei V în cele $k+1$ puncte considerate. În

continuare va fi descrisa schema ENO de aproximare utilizând ca polinom de interpolare polinomul p .

Aproximarea ENO presupune fixarea stencil-ului, adica determinarea celor $k+1$ puncte (respectiv, k intervale) incluzând punctele x_{i-1} , x_i (respectiv I_i) utilizate în constructia lui p . Pentru aceasta este utilizata urmatoarea tehnica [1],[2]:

1. Initial, se considera $\tilde{S}(i) = \{x_{i-1}, x_i\}$, în care \tilde{S} reprezinta stencil-ul corespunzator functiei primitive V . Stencil-ul corespunzator functiei v este $S(i) = I_i$ (sunt cunoscute valorile medii ale functiei v pe intervalele reprezentând o partiție a grilei). Polinomul de interpolare este:

$$P^1(x) = V[x_{i-1}] + V[x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})$$

2. Alegerea urmatorului punct, la stânga sau la dreapta multimii $\tilde{S}(i)$, este realizata astfel:

$$\tilde{S}(i) = \{x_{i-1}, x_i\} \cup \{x_{i-2}\} \text{ si}$$

$$P^2(x) = P^1(x) + V[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})(x - x_i)$$

sau

$$\tilde{S}(i) = \{x_{i-1}, x_i\} \cup \{x_{i+1}\} \text{ si}$$

$$P^2(x) = P^1(x) + V[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})(x - x_i)$$

Dintre cei doi vecini x_{i-2} si x_{i+1} se va alege unul singur pe baza urmatorului criteriu:

daca $V[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] < V[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$, atunci

$$\tilde{S}(i) = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}, \quad \text{altfel,}$$

$$\tilde{S}(i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}.$$

Pasul 2 continua pâna la selectarea numarului de puncte dorit.

Reconstructia de ordin k-1 a functiei v

Fiind date valorile medii $\{\bar{v}_i\}, 1 \leq i \leq k$ ale functiei v pe intervalele I_i , reconstructia polinomiala de grad $k-1$ decurge astfel [1]:

$$V[x_{s_{i-1}}, x_{s_i}, \dots, x_{s_{i+r-1}}] = \min\{V[x_{l-1}, \dots, x_{l+r-1}], i-r+1 \leq l \leq i\}$$

Este utilizata apoi formula lui Newton pentru calculul polinomului $p_i(x)$, de grad $k-1$ pe intervalul I_i satisfacând conditia $p_i(x) = v(x) + O(Dx^k)$.

Observatii

1. Cea mai buna aproximare a functiei v pentru zonele de regularitate se obtine alegând un stencil centrat.
2. În cazul unei functii cu cresteri lente, se considera o adaptivitate inutila a algoritmului.
3. Procedura de alegere a stencil-ului utilizeaza multe structuri "if-then-else", ceea ce induce un algoritm ineficient.
4. În cadrul aceleiasi proceduri exista mai multi candidati testati, dar unul singur va fi ales. Daca se fixeaza un stencil, informatia continuta în alte variante este pierduta.
5. Cele doua proceduri de alegere a stencil-ului nu conduc la aceleasi rezultate; se poate face o alegere a stencil-ului astfel încât functia initiala sa nu aibe variatii minime.

Solutii posibile

1. Ansamblul de stencil-uri posibile poate fi partajat în doua categorii: stencil-uri cu probabilitate mare de selectare (stencil-uri preferate) si stencil-uri care pot fi selectate cu o probabilitate mica.

1. Sunt calculate diferentele divizate ale primitivei V a functiei v .

2. Pentru fiecare interval I_i se considera stencil-ul $S(i) = \{I_i\}$. Presupunând cunoscut stencil-ul pentru $l=2, \dots, k$,

$\tilde{S}_l(i) = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l}\}$, pentru calculul lui $S_{l+1}(i)$ se determina $V[x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+l}]$ si $V[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l+1}]$ si,

daca $V[x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+l}] \leq V[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l+1}]$, atunci $S_{l+1}(i) = S_l(i) \cup \{I_{j-1}\}$

altfel $S_{l+1}(i) = S_l(i) \cup \{I_{j+l+1}\}$

O modalitate alternativa de determinare a urmatorului punct este aceea de alegere a vecinului s_i astfel încât:

De exemplu, prima categorie poate contine stencil-urile centrate, iar criteriul de alegere este influentat de un parametru de deplasare b . Astfel, testul $V[x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+l}] \leq V[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l+1}]$ este înlocuit cu:

$V[x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+l}] < b V[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l+1}]$, daca x_j este mai mare decât cel mai din stânga punct din stencil-ul preferat

$bV[x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+l}] < V[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l+1}]$, altfel.

Aceasta strategie permite un control optim al erorii care se face în cazul unui stencil neadecvat ales.

2. O strategie alternativa o constituie asocierea câte unei ponderi fiecarui stencil candidat pentru un interval dat I_i . Astfel, multimii de stencil-uri $S_r(i) = \{x_{i-r}, \dots, x_{i+r+k-1}\}, r=0, \dots, k-1$ i se asociaza multimea de ponderi $w_r \geq 0$,

$$\sum_{r=0}^{k-1} w_r = 1.$$

Aceasta strategie permite obtinerea unei dependente de date "mai continue" în procedura de alegere a stencil-ului. Ponderile sunt alese astfel încât sa constituie indicatori buni asupra regularitatii functiei: au valori mari în cazul stencil-urilor alesi în regiunile de regularitate ale functiei si valori mici altfel.

De exemplu, pot fi alese drept ponderi combinatii lineare de diferente divizate: pentru fiecare $S_j = \{x_{j-r}, \dots, x_{j+l}\}$ sunt calculate

diferentele divizate, pe baza carora este

definit un indice de regularitate astfel:

$$IS_j = \sum_{l=l}^r \frac{\sum_{i=l}^{r-l} (\mathbf{D}^l [v_{j+k+i-r}])^2}{r-l}, \quad \text{unde } \mathbf{D}^k [v_{j-r}] = V[v_{j-r}, \dots, v_{j+l}] \quad k = l + r + 1$$

Ponderea corespunzatoare stencil-ului este definita conform relatiei:

$$w_j = \sum_{k=0}^{r-l} \frac{\mathbf{a}_k^j}{\sum_{l=0}^{r-l} \mathbf{a}_l^j}, \quad \text{unde } \mathbf{a}_k^j = \frac{1}{(\mathbf{e} + IS_{j+k})^r}, \quad k = 0, \dots, r-1.$$

Algoritmul de compresie/decompresie utilizând predictorului WLMS

Algoritmul de compresie pe baza predictorului WLMS utilizeaza urmatoorii vectori de informatie si operatori:

I. Vectorul de intrare $v^L \in \mathbb{R}^{2^L}$ reprezinta valorile medii ale semnalului f pe intervale ale grilei de tipul $[2^{-L}(i-1), 2^{-L}i]$.

II. Operatorul de decimare D_k^{k-1} realizeaza reducerea prin medie:

$$(D_k^{k-1} v^k)_i = \frac{v_{2i}^k + v_{2i+1}^k}{2}, \quad i = 0, \dots, 2^{k-1}.$$

III. Predictorul P_{k-1}^k aplicat vectorului "decimat" v^{k-1} conduce la o aproximare a vectorului v^k , astfel: $(P_{k-1}^k v^{k-1})_{2t}$ reprezinta valoarea medie a polinomului de gradul II obtinut prin metoda *wlms* considerând 5

puncte din vecinatatea lui v_t^{k-1} (punctele $v_{t-2}^{k-1}, v_{t-1}^{k-1}, v_t^{k-1}, v_{t+1}^{k-1}, v_{t+2}^{k-1}$), astfel.

Fie polinomul $P_t = ax^2 + bx + c$ si p_t media acestui polinom pe intervalul $[t, t+1]$,

$$p_t = a \int_t^{t+1} x^2 dt + b \int_t^{t+1} x dt + c \int_t^{t+1} dt.$$

Metoda *wlms* revine la determinarea coeficientilor a, b, c

astfel încât $\sum_{j=-2}^2 w_{j+t} (v_{j+t}^{k-1} - p_{j+t})^2$ sa fie mi-

nima.

Procedura de alegere a ponderilor w_{j+t} corespunzatoare

punctelor $v_{j+t}^{k-1}, j=-2, \dots, 2$, tine

cont de regularitatea functiei considerate pe

fiecare din intervalele $[t+j, t+j+1]$ (pon-

derea w_{j+t} este mare daca intervalul nu

contine singularitati si mica altfel):

$$w'_{j+t} = \frac{1}{1 + \left(\frac{v_{2(t+j+1)}^k - v_{2(t+j)}^k}{2} \right)^2}, \quad s = \sum_{j=-2}^2 w'_{t+j}, \quad w_{t+j} = \frac{w'_{t+j}}{s}.$$

Fie $S = \sum_{j=-2}^2 w_{j+t} (v_{j+t}^{k-1} - p_{j+t})^2$, unde p_{j+t} este

dat de relatia

$$p_{j+t} = a \int_{t+j}^{t+j+1} x^2 dt + b \int_{t+j}^{t+j+1} x dt + c \int_{t+j}^{t+j+1} dt \quad \underline{\text{not.}} \quad a \mathbf{a}_{j+t} + b \mathbf{b}_{j+t} + c \mathbf{c}_{j+t}.$$

Coefficientii a, b si c sunt determinati din sistemul:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \text{ adica:}$$

$$\begin{cases} a \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{a}_{t+j}^2 + b \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{a}_{t+j} \mathbf{b}_{t+j} + c \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{a}_{t+j} \mathbf{c}_{t+j} = \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{a}_{t+j} v_{t+j}^{k-1} \\ b \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{b}_{t+j}^2 + a \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{a}_{t+j} \mathbf{b}_{t+j} + c \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{b}_{t+j} \mathbf{c}_{t+j} = \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{b}_{t+j} v_{t+j}^{k-1} \\ c \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{c}_{t+j}^2 + a \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{a}_{t+j} \mathbf{c}_{t+j} + b \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{b}_{t+j} \mathbf{c}_{t+j} = \sum_{j=-2}^2 w_{t+j} \mathbf{c}_{t+j} v_{t+j}^{k-1} \end{cases}$$

IV. Pragul utilizat în acest algoritm depinde atât de nivelul de rezoluție k de la momentul curent, cât și de vectorul de detalii curent:

$\mathbf{x}(k) = \sqrt{\log_2 \text{Var}(X_k)}$, unde X_k reprezintă variabila aleatoare a cărei selecție este disponibilă în vectorul d^k .

Aplicarea acestui algoritm ca metoda de precompresie a imaginilor realizează o reducere cu aproximativ 50% a dimensionalității. Algoritmul *wlms* a fost testat pe imagini cu 256 de nivele de gri de la alb la negru (valori ale funcției cuprinse între 0 și 255), câteva din rezultatele furnizate fiind prezentate în continuare.

Imaginea de intrare



Imaginea obtinuta în urma decompresiei



Precompresie de 50.60%
Eroarea medie totala este 1.71

Imaginea de intrare**Imaginea obtinuta în urma decompresiei**

Precompresie de 47.61%
Eroarea medie totala este 1.74

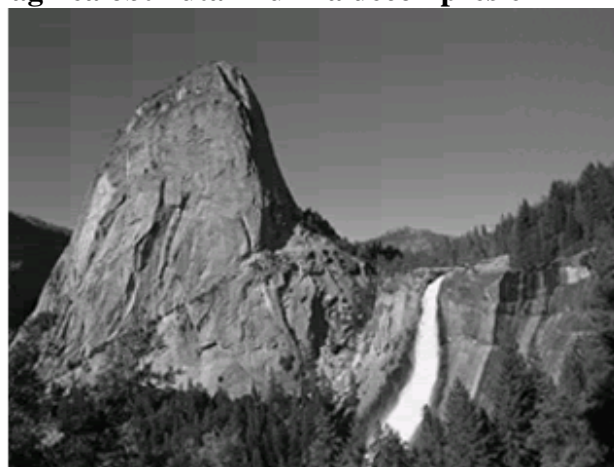
Imaginea de intrare**Imaginea obtinuta în urma decompresiei**

Precompresie de 47.51%
Eroarea medie totala este 1.60

Imagine a de intrare



Imaginea obtinuta în urma decompresiei



Precompresie de 53.77%

Eroarea medie totala este 1.36

Bibliografie

[1] Amat S., Arandiga F., Cohen A., Donat R., Garcia G., VonOehsen M, "Data compression with ENO Schemes: a case study", www.ann.jussieu.fr (recenzat 1999)

[2] Claypoole K., Davis G., Sweldens W., Baroniuk R., "Nonlinear Wavelet Transforms for Image Coding", Proceedings of 31st Asilomar Conference on Signal Processing, Vol. 1., 1997

[3] Cover T.M., Thomas J.A. "Elements of Information Theory", John Wiley & Sons, Inc, 1991

[4] Gonzales R., Woods R., "Digital Image Processing, Addison Wesley, 1993

[5] Harten, A., "Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets", Journal of Applied Numerical Mathematics, 12, 1993.

[6] Kovacevic J., Sweldens W., "Wavelet Families of Increasing Order in Arbitrary Dimensions", IEEE Transactions on Image Processing, 1999

[7] Lehtinen J., "Limiting Distorsion of a Wavelet Image Coding", Acta Cybernetica 14/1999

[8] Said A., Pearlman W. A., "An Image Multiresolution Representation for Lossless and Lossy Image Compression", IEEE Transactions on Image Processing, 1996

[9] Salomon D., "Data Compression. The Complete Reference", Springer Verlag, 1998

[10] State L. "Analiza in componente principale pentru compresia/restaurarea datelor", Informatica Economica, nr.2/1997

[11] State L., Cocianu C., "Determinarea caracteristicilor lineare optimale din punct de vedere informational în compresia/decompresia datelor", Informatica Economica, Vol. 1, Nr. 4, 1997

[12] Stollnitz E.J., DeRose T.D., Salesin D.H., "Wavelets for Computer Graphics", Morgan Kauffmann, 1996