Estimatorii de credibilitate din modelul clasic al lui Bühlmann

Asist. Virginia ATANASIU
Catedra de Matematic\, A.S.E. Bucure[ti

Articolul descrie modelul clasic de credibilitate al lui Bühlmann, relevând meritele de ordin practic pe care acesta le posed\; mai precis, sunt eviden]iate reu[itele ^nregistrate de Bühlmann pe plan actuarial, deosebit de importante pentru industria asigur\rilor non-via]\. Modelul original al lui Bühlmann prezint\ urm\torul incon-venient: deoarece implic\ un singur contract, estimatorul de credibilitate al respectivei prime nete con]ine parametrii de risc necunoscu]i, ceea ce face imposibil\ o cuan-tificare statistic\ din observa]ii a rezultatului astfel ob]inut. Din acest considerent modelul ini]ial a fost ajustat, ^mbun\t\]it, ^n sensul evalu\rii parametrilor de structur\ ai riscului, prin introducerea contractului ^ntr-un coleciv de contracte, toate oferind informa]ii independente ^ntre ele despre distribu]ia riscului. Prin urmare, dac\ se iau ^n considerare diferite contracte, fiecare cu aceia[i parametrii de structur\, atunci se pot estima m\rimile respective, folosind trecutul statistic al contractelor. Astfel, rezul-tatele de credibilitate din modelul original al lui Bühlmann, interesante din punct de vedere pur teoretic, sunt valorificate cu condi]ia trecerii la modelul clasic al lui Bühlmann.

***Cuvinte cheie**: risc, variabile structurale, prim\ net\ de risc a unui contract, esti-matori de credibilitate.*

Modelul clasic al lui Bühlmann const\ dintr-un portofoliu de k poli]e (con-tracte) de asigurare identice [i inde-pendente, aflate sub observa]ie statistic\ un num\r de t (≥2) ani. Riscul implicat de contractul j este notat cu X_j [i asimilat cu o variabil\ aleatoare nene-gativ\ ($j=\overline{1,k}$). Parametrul riscului X_j este notat cu q_j [i presupus variabil\ aleatoare real\ ($j=\overline{1,k}$);q_j este cunoscut [i sub numele de variabil\ aleatoare structural\ a contractului. Denumirile acordate lui q_j, ($j=\overline{1,k}$), sunt justificate de faptul c\ acesta reprezint\ variabila aleatoare ce descrie caracteristicile ris-cului luat ^n considera]ie. Variabilele observabile ale riscului X_j se noteaz\ cu X_{j1}, X_{j2}, …, X_{jt} ($j=\overline{1,k}$). Este de la sine ^n]eles c\ X_{j1}, X_{j2}, …, X_{jt} au toate aceea[i distribu]ie ca [i X_j ($j=\overline{1,k}$). Lucr\m ^n ipoteza c\ riscul pentru fiecare poli]\ este stabil ^n timp, ceea ce ^nseamn\ c\ poate fi caracterizat prin aceea[i valoare a parametrului de risc q_j de-a lungul anilor de valabilitate ai contractului j ($j=\overline{1,k}$).

Prin urmare, acest model const\ din variabilele aleatoare structurale q_j [i variabilele aleatoare obsevabile X_{jr}, unde $j=\overline{1,k}$, iar $r=\overline{1,t}$, astfel ^ncât putem afirma despre contractul j c\ este un vector aleator de componente: q_j (parametrul aleator de structur\) [i X_{j1}, X_{j2}, …, X_{jt} (observa]iile efectuate asupra poli]ei j), unde $j=\overline{1,k}$.

Deci, contractul

$$j=\left(?_j, X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}\right)`=\left(?_j, \underline{X}`_j\right)`;\ j=\overline{1,k}.$$

<u>Observa]ie</u>: $\underline{X}`_j$ denot\ vectorul obser-va]iilor, adic\ vectorul de componente X_{j1}, X_{j2}, …, X_{jt} ($j=\overline{1,k}$).

A[a dup\ cum s-a men]ionat, contrac-tele j, $j=\overline{1,k}$, (reprezentate de pere-chile (q_j, $\underline{X}`_j$)`, $j=\overline{1,k}$) sunt presupuse a fi independente [i identic distribuite condi]ional, adic\ pentru fiecare contract j, $j=\overline{1,k}$, [i pentru q_j = θ_j fixat, variabilele

$X_{j1},X_{j2},\ldots,X_{jt}$ sunt indepen-dente [i identic distribuite (condi]ional).
Ipoteza introdus\ mai ^nainte, prin care vectorul observa]iilor $\underline{X}`_j$ are componentele independente condi]ional, dat fiind c\ $q_j = \theta_j$, implic\ urm\toarea egalitate:

$$F_{\underline{X}`_j|?_j}(x_{j1},x_{j2},\ldots x_{jt}\,|\,?_j)=$$
$$=F_{X_{j1}|?_j}(x_{j1}\,|\,?_j)F_{X_{j2}|?_j}(x_{j2}\,|\,?_j)\ldots F_{X_{jt}|?_j}(x_{jt}\,|\,?_j) \qquad (1),$$

care descrie sau exprim\ faptul c\ pentru un contract j cu parametrul de risc dat $q_j = \theta_j$, riscurile sunt inde-pendente (condi]ional) de la an la an ($j=\overline{1,k}$).
Observa]ie: S-a notat cu $F_{\underline{X}`_j|?_j}(\bullet\,|\,?_j)$ func]ia de reparti]ie a vectorului aleator condi]ionat $(\underline{X}`_j\,|\,\theta_j)$, iar cu $F_{X_{jr}|?_j}(\bullet\,|\,\theta_j)$ func]ia de reparti]ie a variabilei aleatoare condi]ionate $(X_{jr}\,|\,\theta_j)$, unde $r=\overline{1,t}$.
~ntrucât:

$$(X_{jr}\,|\,\mathbf{?}_j=\theta_j)\overset{(P)}{\equiv}(X_j\,|\,\mathbf{?}_j=\theta_j),\forall r=\overline{1,t} \quad (2),$$

rezult\ c\ putem reprezenta valorile medii, respectiv varian]ele acestor varia-bile aleatoare condi]ionate prin aceea[i func]ie $\mu(\bullet)$, respectiv $\sigma^2(\bullet)$, depinzând de q_j, dar independent\ de r, $r=\overline{1,t}$ [i anume:

$$\mu(\theta_j)=M(X_{jr}\,|\,\mathbf{?}_j=\theta_j)=M(X_j\,|\,\mathbf{?}_j=\theta_j),\forall r=\overline{1,t} \qquad (3),$$

respectiv:

$$\sigma^2(\theta_j)=Var(X_{jr}\,|\,\mathbf{?}_j=\theta_j)=Var(X_j\,|\,\mathbf{?}_j=\theta_j),\forall r=\overline{1,t} \qquad (4).$$

{irul de egalit\]i (3) d\ o cantitate ce semnific\ prima net\ de risc a contrac-tului j, dac\ parametrul de risc al acestuia (adic\ q_j) este egal cu θ_j.
Pentru modelul de fa]\, teoria credibilit\]ii, a[a dup\ cum a fost dezvoltat\ de Bühlmann, are ca scop principal es-timarea primei nete de risc a con-tractului j, dac\ parametrul de risc al s\u este q_j, adic\ evaluarea lui:

$$\mu(\mathbf{?}_j)=M(X_{jr}\,|\,\mathbf{?}_j)=M(X_j\,|\,\mathbf{?}_j),\forall r=\overline{1,t} \qquad (5).$$

Estimatorii ce urmeaz\ a fi folosi]i ^n acest sens sunt func]ii de variabilele observabile, adic\ de componentele vectorului aleator $\underline{X}`_j=(X_{j1},X_{j2},\ldots X_{jt})$, $j=\overline{1,k}$, determinate astfel ^ncât s\ minimizeze eroarea medie p\tratic\.
Prin urmare, estimarea lui $\mu(q_j)$ necesit\ rezolvarea problemei de minim:

$$\underset{g_j(\bullet)}{Min}\, M\{[\mu(\mathbf{?}_j)-g_j(X_{11},\ldots,X_{1t},X_{21},\ldots,X_{2t},\ldots,X_{k1},\ldots,X_{kt})]^2\} \quad (6),$$

unde $g_j(\bullet)$ este o func]ie de observa]iile $X_{ir}, i=\overline{1,k}, r=\overline{1,t}$, arbitrar\.
Solu]iile pentru problemele de minim (6) tind s\ produc\, mai degrab\, estim\ri nefavorabile, dac\ ^ntr-adev\r ar putea fi g\site aceste solu]ii. Din acest motiv, este practic s\ se deter-mine aproxim\ri ale solu]iilor optime prin restrângerea clasei de func]ii admisibile $g_j(\bullet)$. Atunci când mul]imea de func]ii admisibile $g_j(\bullet)$ este limitat\, se ob]in estimatori care sunt, ^n

general, mai pu]in exac]i, dar adesea, mai u[or de calculat.

O alegere posibil\ a func]iilor $g_j(\bullet)$, $j=\overline{1,k}$, care determin\ prime u[or calculabile este:

$$g_j\left(X_{11},\ldots,X_{1t},X_{21},\ldots,X_{2t},\ldots,X_{k1},\ldots,X_{kt}\right)= \\ = c_j+\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t}c_{jir}X_{ir} \qquad (7),$$

conducând la a[a numitele rezultate de credibilitate liniar\-neomogen\.

~n modelul clasic de credibilitate al lui Bühlmann, clasa de func]ii $g_j(\bullet)$ este limitat\ la mul]imea de func]ii liniare neomogene.

<u>Observa]ie</u>: Deoarece, ^n cadrul modelului, toate contractele au ^n comun faptul c\ varian]ele lor sunt reprezentate prin acelea[i func]ii $\sigma^2(\bullet)$ de parame-trul riscului, iar riscurile contractelor sunt independente condi]ional ^n timp, rezult\ pentru fiecare contract j, urm\-toarea matrice de covarian]e a observa-]iilor din anii $r=\overline{1,t}$:

$$Cov\left(\underline{X}_j \mid ?_j\right)=I^{(t,t)}\sigma^2\left(?_j\right) \qquad (8),$$

unde $I^{(t,t)}$ indic\ matricea unitate de ordinul (t×t). ~ntr-adev\r:

$$Cov\left(\underline{X}_j \mid ?_j\right)\overset{def}{=}\left[Cov\left(X_{jr},X_{jr`} \mid ?_j\right)\right]_{r,\,r`=\overline{1,\,t}}=$$

$$=\begin{pmatrix} Cov\left(X_{j1},X_{j1} \mid ?_j\right) & Cov\left(X_{j1},X_{j2} \mid ?_j\right) & \ldots & Cov\left(X_{j1},X_{jt} \mid ?_j\right) \\ Cov\left(X_{j2},X_{j1} \mid ?_j\right) & Cov\left(X_{j2},X_{j2} \mid ?_j\right) & \ldots & Cov\left(X_{j2},X_{jt} \mid ?_j\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov\left(X_{jt},X_{j1} \mid ?_j\right) & Cov\left(X_{jt},X_{j2} \mid ?_j\right) & \ldots & Cov\left(X_{jt},X_{jt} \mid ?_j\right) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} Var\left(X_{j1} \mid ?_j\right) & Cov\left(X_{j1},X_{j2} \mid ?_j\right) & \ldots & Cov\left(X_{j1},X_{jt} \mid ?_j\right) \\ Cov\left(X_{j1},X_{j2} \mid ?_j\right) & Var\left(X_{j2} \mid ?_j\right) & \ldots & Cov\left(X_{j2},X_{jt} \mid ?_j\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov\left(X_{j1},X_{jt} \mid ?_j\right) & Cov\left(X_{j2},X_{jt} \mid ?_j\right) & \ldots & Var\left(X_{jt} \mid ?_j\right) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} s^2\left(?_j\right) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s^2\left(?_j\right) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s^2\left(?_j\right) \end{pmatrix}=I^{(t,t)}s^2\left(?_j\right),$$

iar justific\rile sunt cele de mai jos:

$$Cov\left(X_{jr},X_{jr} \mid ?_j\right)=M\left(X_{jr}X_{jr} \mid ?_j\right)-M\left(X_{jr} \mid ?_j\right)M\left(X_{jr} \mid ?_j\right)=$$

$$=M\left(X_{jr}^2 \mid ?_j\right)-M^2\left(X_{jr} \mid ?_j\right)=Var\left(X_{jr} \mid ?_j\right)=\sigma^2\left(?_j\right);\ j=\overline{1,k};\ r=\overline{1,t}$$

$$Cov\left(X_{jr},X_{jr`} \mid ?_j\right)=M\left(X_{jr}X_{jr`} \mid ?_j\right)-M\left(X_{jr} \mid ?_j\right)M\left(X_{jr`} \mid ?_j\right)=$$

$$=M\left(X_{jr} \mid ?_j\right)M\left(X_{jr`} \mid ?_j\right)-M\left(X_{jr} \mid ?_j\right)M\left(X_{jr`} \mid ?_j\right)=0;\ \forall j=\overline{1,k};\ \forall r<r`;\ r,r`=\overline{1,t}.$$

Bühlmann introduce a[a-numi]ii parametrii de structur\, nota]i: m, a s^2 [i defini]i dup\ cum urmeaz\:

$$m = M(X_{jr}) = M[\mu(\theta_j)];\ a = Var[\mu(\theta_j)];\ s^2 = M[\sigma^2(\theta_j)] \qquad (9).$$

~n continuare prezent\m rezultatul ob]i-nut de Bühlmann privind estimatorii de credibilitate neomogeni:

Teorema 1. (Modelul clasic al lui Bühlmann): Se consider\ un portofoliu ca cel descris ^n diagrama 1.:

Contract:			1...j...k
Variabila de structur\:			q_j
Variabilele	d	1	X_{j1}
observabile:	u	2	X_{j2}
	r	.	.
	a	.	.
	t	.	.
	a	t	X_{jt}
[ani]			

Diagrama 1.: Modelul clasic al lui Bühlmann

Dac\ ambele ipoteze (B1) [i (B2) sunt adev\rate, unde:

(B_1) $M(X_{jr}|?_j)=\mu(?_j), Cov(X_j|?_j)=\sigma^2(?_j)I^{(t,t)}, j=\overline{1,k}$

[i (B2) contractele j = 1,…,k sunt independente, variabilele $q_1,\ldots,q_k$ sunt identic distribuite, iar observa]iile X_{jr}, $j=\overline{1,k}, r=\overline{1,t}$ au varian]a finit\, atunci estimatorii optimi (^n sensul celor mai mici p\trate) liniari neomogeni M^a_j ai lui $\mu(?_j)$, $j=\overline{1,k}$, sunt:

$$\hat{\mu}(?_j) = M^a_j = (1-z)m + zM_j \qquad (10).$$

Aici $M_j = \overline{X}_j = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} X_{js}$ indic\ estima-torul individual pentru $\mu(?_j)$. Factorul de credibilitate z rezultat (care figureaz\ ^n estimatorul de credibilitate "ajustat" M^a_j este: $z = at/(s^2+at)$ (11).

Demonstra]ie: Pentru fiecare $j=\overline{1,k}$ avem de solu]ionat problema de minim urm\toare:

$$\underset{\substack{c_j, c_{jir},\\ i=\overline{1,k},\\ r=\overline{1,t}}}{Min}\ M\left\{\left[\mu(?_j) - c_j - \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}X_{ir}\right]^2\right\} \qquad (12).$$

~ntrucât (12) reprezint\ o problem\ de minimizare a unei forme p\tratice po-zitiv definite, este suficient s\ g\sim o solu]ie a ei, anulând toate derivatele par]iale de ordin I ale acesteia. Impunând condi]ia ca: $\frac{\partial f}{\partial c_j} = 0$ (13), unde:

$$f = f\left(c_j, c_{jir}, i = \overline{1,k}, r = \overline{1,t}\right) \stackrel{def}{=} M\left\{\left[\mu(?_j) - c_j - \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}X_{ir}\right]^2\right\},$$

rezult\ o ecua]ie ^n necunoscuta c_j, care, prin rezolvare, conduce la expre-sia (14) pentru c_j, [i anume:

$$c_j = m\left(1 - \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}\right) \quad (14).$$

~nlocuind pe c_j cu formula dat\ la (14) ^n problema (12), aceasta devine:

$$\underset{\substack{c_j, c_{jir},\\ i=\overline{1,k},\\ r=\overline{1,t}}}{\text{Min}}\ M\left\{\left[\mu(?_j) - m - \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}(X_{ir} - m)\right]^2\right\} \quad (15).$$

Impunând condi]iile: $\frac{\partial f}{\partial c_{ji`r`}} = 0$ (16) pentru $i` = \overline{1,k}; r` = \overline{1,t}$ se ob]in ecua]iile:

$$Cov\left[\mu(?_j), X_{i`r`}\right] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir} Cov\left(X_{i`r`}, X_{ir}\right) \quad (17).$$

Formula de calcul a covarian]ei riscu-rilor independente condi]ional pentru un contract este:

$$Cov\left(X_{jq}, X_{jr}\right) = a + \delta_{rq}s^2 \quad \forall r,q = \overline{1,t}, (18),$$

iar formula de calcul a covarian]ei din-tre prima net\ de risc a unui contract [i riscurile independente condi]ional ale acestuia este:

$$Cov\left(\mu(?_j), X_{jq}\right) = a,\ \forall q = \overline{1,t} \quad (19).$$

}inând seama de rela]iile (18) [i (19), sistemul (17) devine, ^n cazul i` = j, echivalent cu urm\torul:

$$a = \sum_{r=1}^{t}\left(a + \delta_{rr`}s^2\right)c_{jjr},\ r` = \overline{1,t} \quad (20),$$

care, prin rezolvare, conduce la:

$$c_{jj1} = c_{jj2} = ... = c_{jjt} = a/\left(s^2 + at\right) = z/t;\ j = \overline{1,k} \quad (21).$$

~n cazul $i` \neq j$, sistemul (17) se scrie astfel:

$$0 = \sum_{r=1}^{t} c_{ji`r}\left(a + \delta_{rr`}s^2\right),\ r` = \overline{1,t} \quad (22),$$

de unde rezult\ imediat c\: $c_{ji`r} = 0, \forall r = \overline{1,t}\ (i` \neq j)$ (23).

Din rela]iile (14), (21) [i (23) se ob]ine pentru c_j formula: $c_j = (1 - z)m$ (24). Dac\ ^n expresia:

$$\hat{\mu}(?_j) = M_j^a = c_j + \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}X_{ir} \quad (25),$$

a estimatorului optim liniar neomogen pentru prima net\ de risc a contractului j, ^nlocuim coeficien]ii c_j, c_{jir}, $i = \overline{1,k}, r = \overline{1,t}$ cu valorile acestora determinate anterior (21 [i 23), atunci se verific\ faptul c\ egalit\]ile (10) reprezint\ primele de credibilitate din modelul clasic al lui Bühlmann.

<u>Observa]ie</u>: Estimatorii (10) determina]i ^n cadrul acestui model con]in trei parametrii necunoscu]i, [i anume: a, s^2 [i m. Pentru a putea folosi rezultatele teoremei 1 trebuie s\ estim\m carac-teristicile de protofoliu men]ionate (mai precis, s\ le ^nlocuim cu estima]iile lor ^n formulele (10)). Deoarece contractele sunt incluse ^ntr-un colectiv de con-tracte identice, dispunem de mai multe observa]ii referitoare la parametrul de risc, ^ncât este posibil s\ atribuim esti-matori nedeplasa]i parametrilor struc-turali implica]i.

Bibliografie

1. **Goovaerts, M.J., Kass, R., Van Heerwaarden, A.E., Bauwelinckx, T.**, ***Insurance Series, volume 3, Efective actuarial methods***, University of Amsterdam, The Netherlands (1990).
2. **Pentikainen, T., Daykin, C.D., Pesonen, M.**, ***Practical Risk Theory for Actuaries***, Universite Pieere et Marie Curie (1990).
3. **Sundt, B.**, ***An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics***, Veroffentlichungen de Instituts für Versicherungswissenschaft de Universitat Mannheim Band 28 (1984 VVW Karlsruhe).