Utilizarea claselor de echivalenta in analiza asistata de calculator a sistemelor cu evenimente discrete

Conf.dr. Alexandru TERTISCO, ing. Alexandru BOICEA
Facultatea de Automatica si Calculatoare, Universitatea POLITEHNICA Bucuresti
Sef lucr.dr. Gheorghe BORDEA
Institutul de Marina Civila, Constanta

Pentru sistemele de productie bazate pe actiuni, rezolvarea problemei planificarii actiunilor si determinarea multimilor de actiuni independente pot fi realizate prin utilizarea unor concepte din teoria relatiilor.
Se pune problema în ce conditii exista un plan care sa poata realiza tranzitia sistemului dintr-o stare initiala impusa x^0 într o stare finala prescrisa x^f. Raspunsul la asemenea problema se poate obtine prin construirea claselor de echivalenta determinate de relatia starilor pe spatiul S, stabilirea relatiilor dintre aceste clase si verificarea apartenentei starilor x^0 si x^f la aceste clase.
O alta problema care se poate pune pentru un sistem cu evenimente discrete consta în determinarea multimilor de actiuni independente, adica a actiunilor care se pot executa în paralel. Cunoa sterea claselor de echivalenta determinate de relatia actiunilor M pe multimea actiunilor A si cunoasterea relatiilor dintre aceste clase de echivalenta permite stabilirea multimilor de actiuni independente.
***Cuvinte cheie**: sisteme de productie,clase de echivalenta,relatii pe multimi.*

1. Formularea unor probleme ale sistemelor bazate pe actiuni

Pentru sistemele de productie bazate pe actiuni, rezolvarea problemei planificarii actiunilor si determinarea multimilor de actiuni independente pot fi realizate prin utilizarea unor concepte din teoria relatiilor.
Dupa cum rezulta din definitia unui plan, pentru un sistem cu evenimente discrete dat prin multimea starilor *S* si respectiv multimea actiunilor *A*, determinarea unui plan este echivalenta cu determinarea unei multimi de actiuni si a ordinei de executie a acestora, astfel încât sa se poata realiza tranzitia sistemului dintr-o stare initiala data x^0 într-o stare finala prescrisa x^f.
Se pune problema în ce conditii exista un plan care sa poata realiza tranzitia sistemului dintr-o stare initiala impusa x^0 într o stare finala prescrisa x^f. Raspunsul la asemenea problema se poate obtine prin construirea claselor de echivalenta determinate de relatia starilor pe spatiul *S*, stabilirea relatiilor dintre aceste clase si verificarea apartenentei starilor x^0 si x^f la aceste clase.
O alta problema care se poate pune pentru un sistem cu evenimente discrete consta în determinarea multimilor de actiuni independente, adica a actiunilor care se pot executa în paralel. Cunoa sterea claselor de echivalenta determinate de relatia actiunilor *M* pe multimea actiunilor *A* si cunoa sterea relatiilor dintre aceste clase de echivalenta permite stabilirea multimilor de actiuni independente.
În lucrare se prezinta algoritmii elaborati, care au stat la baza programelor pentru verificarea conditiei de existenta a unui plan si pentru determinarea actiunilor executabile in paralel, in cadrul unui sistem de productie.

1.1. Trazitivitatea, reflexivitatea si simetria relatiilor *R* si *M*

O relatie reflexiva si tranzitiva determina pe multimea pe care a fost definita clase de echivalenta disjuncte.

În cazul în care relatia este de echivalenta, adica este si simetrica, clasele de echivalenta rezultate nu sunt în relatii de ordine. Daca însa între unele din elementele multimii exista legaturi antisimetrice atunci între clase se pot stabili relatii de ordine.

Pentru un sistem cu evenimente discrete, relatia starilor R si relatia actiunilor M sunt tranzitive:

- Relatia R este tranzitiva deoarece daca, dupa executia unor actiuni sau secvente de actiuni, din starea $x^1 \in S$ se ajunge în starea $x^2 \in S$, iar din starea $x^2 \in S$ se ajunge în starea $x^3 \in S$, atunci exista o actiune, sau secventa de actiuni, ce asigura tranzitarea sistemului din starea x^1 în starea x^3;
- Relatia M este tranzitiva deoarece daca actiunea $a_2 \in A$ poate fi executata dupa actiunea $a_1 \in A$, iar o actiune $a_3 \in A$ poate fi executata dupa actiunea a_2, atunci actiunea a_3 poate fi executata dupa actiunea a_1.

În anumite situatii, fiecare din cele doua relatii R si M pot fi considerate si reflexive.

Astfel, în cazul în care $x^0 \neq x^f$, situatie normala pentru un plan, relatia starilor R poate fi considerata reflexiva. Acest lucru se poate vedea si pe graful din figura 1 unde, în cazul exemplului 1, existenta sau absenta buclelor elementare, adica, adaugarea sau excluderea unor arce reflexive la graful sistemului nu influenteaza în nici un fel drumurile existente între doua stari oarecare x^0 si x^f. Aceasta se datore ste faptului ca, în cazul unui plan, drumurile de la o stare initiala x^0 la o stare finala x^f sunt formate numai din arce antisimetrice si tranzitive, iar buclele reflexive nu modifica structura acestor drumuri.

Aceasta observatie permite ca studierea problemei existentei unui plan sa se faca nu pe matricea $[R]$ asociata sistemului ci pe o matrice corectata $[R_C]$, unde:

$$[R_C] = I + [R], \qquad (1)$$

I este matricea unitate, iar operatiile între elementele matricelor sunt booleane.

Pentru exemplul considerat, matricea $[R]$ nu contine nici un element reflexiv (pe diagonala principala toate elementele sunt nule). Acestei matrici, în figura 1, îi corespunde graful reprezentat cu linii pline, legaturile reflexive adaugate fiind reprezentate cu linii punctate.

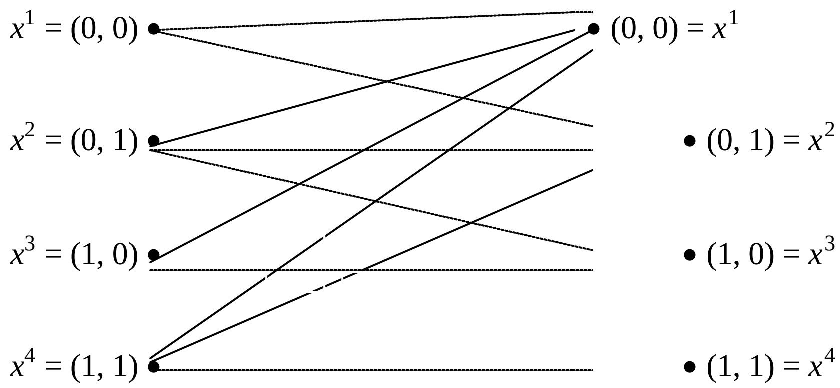

Fig. 1. Graful relatiei starilor sistemului corectat (legaturile reflexive sunt reprezentate punctat)

Matricea corectata, asociata grafului corectat, are pe diagonala principala toate elementele unitare si este urmatoarea:

$$[R_C]= \begin{array}{c|c|c|c|c|} & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \hline x^1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \hline x^2 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ \hline x^3 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \hline x^4 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

În figura 2 este reprezentat graful relatiei, la care s-au adaugat punctat arcele reflexive. Aici, se observa mai clar ca ele nu influenteaza multimea drumurilor de lungime minima, între starile sistemului: $x^1,...,x^4$.

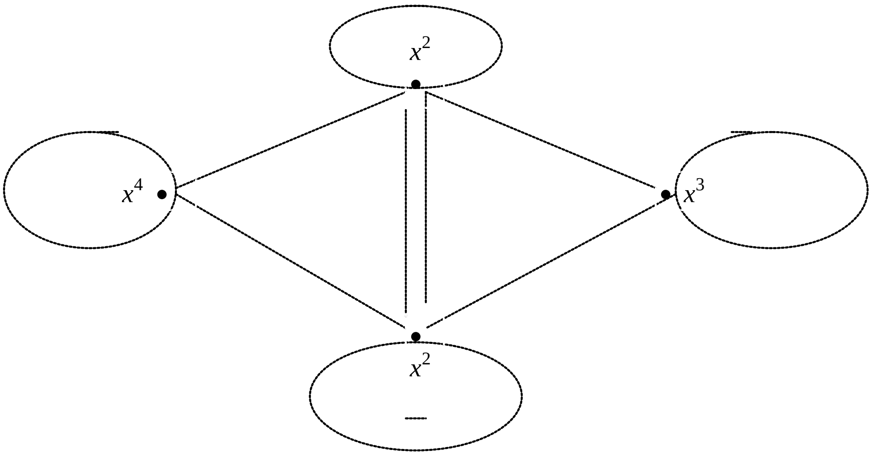

Fig. 2. Graful relatiei starilorsistemului corectat (legaturile reflexive sunt reprezentate punctat)

Observatii asemanatoare se pot face si pentru relatia actiunilor *M*. Astfel, relatia *M* se poate considera reflexiva deoarece, într-un plan, fiecare actiune *a* se produce o singura data si deci se poate considera ca *aMa*.
În ceea ce priveste simetria relatiilor *R* si *M* se poate afirma ca între starile, respectiv între actiunile sistemului pot exista atît legaturi simetrice cât si antisimetrice. Asemenea legaturi conduc la aparitia unor relatii între clasele de echivalenta determinate de relatiia *R* pe multimea *S*, respectiv între clasele de echivalenta determinate de relatia *M* pe multimea *A*. Cunoasterea acestor clase de echivalenta si a relatiilor dintre ele permite rezolvarea problemelor legate de existenta unui plan si de stabilirea multimilor de actiuni independente.

1.2. Clase de echivalenta

Fie *R* o relatie de echivalenta pe o multime *S* si $x \in S$, un element oarecare din *S*.
Se numeste clasa de echivalenta, dupa relatia *R*, multimea *C* a elementelor $y \in S$ aflate în relatie cu *x* prin *R*. Evident, multimea *C* este o submultime a multimii *S*.
În cazul în care un element $y \in S$ nu este în relatie cu *x*, înseamna ca elementele *x* si *y* apartin unor clase de echivalenta disjuncte.
Multimea claselor de echivalenta constituie o partitie a multimii *S*, adica o împartire a acesteia în submultimi disjuncte doua câte doua.
Sistemul de reprezentanti ai unei relatii de echivalenta este o submultime ce contine câte un element si numai unul din fiecare clasa de echivalenta.
Doua taieturi $R(x^1)$ si $R(x^2)$, facute prin doua elementele $x^1 \in S$ si $x^2 \in S$, sunt identice daca elementele x^1 si x^2 apartin aceleia si clase. Aceasta observatie permite identificarea elementelor ce apartin la aceeasi clasa de echivalenta. În matricea unei relatii de echivalenta, clasele de echivalenta sunt grupari de elemente care au taieturi identice.

Daca în reprezentarea matriceala a relatiei R, liniile si coloanele sunt astfel aranjate încât elementele asociate acestora sa fie grupate pe clase de echivalenta, atunci claselor de ecivalenta le corespund grupari patratice de elemente unitare, simetrice fata de diagonala principala si disjuncte doua câte doua.

Prin urmare, identificarea claselor de echivalenta, precum si a elementelor care apartin acestor clase, poate fi usor realizata pe reprezentarea matriceala a relatiei.

Pentru exemplificarea celor afirmate mai sus, se considera o multime $S=\{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\}$ pe care s-a definit o relatie de echivalenta R caracterizata de urmatoarea matrice:

$$[R]= \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & x^9 & x^1 \\
\hline
x^1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \\
x^2 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
x^3 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
x^4 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \\
x^5 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \\
x^6 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \\
x^7 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
x^8 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \\
x^9 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
x^{10} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \\
\hline
\end{array} \quad (3)$$

Dupa cum rezulta din matricea $[R]$, taietura dupa x^2, adica $R[x^2]$, este:

$$R[x^2] =\{x^2, x^3, x^7, x^9\}, \quad (4)$$

adica este formata din starile corespunzatoare elementelor nenule de pe linia x^2. Aceasta înseamna ca:

$$x^2 \approx x^2, x^2 \approx x^3, x^2 \approx x^7, x^2 \approx x^9, \quad (5)$$

în care simbolul $\approx$ exprima relatia de echivalenta. La echivalentele (5), datorita simetriei relatiei R, se adauga urmatoarele echivalente:

$$x^3 \approx x^2, x^7 \approx x^2, x^9 \approx x^2, \quad (6)$$

iar din tranzitivitatea relatiei mai rezulta si echivalentele,

$$x^3 \approx x^3, x^3 \approx x^7, x^3 \approx x^9, x^7 \approx x^3, x^7 \approx x^7,$$
$$x^7 \approx x^9, x^9 \approx x^3, x^9 \approx x^7, x^9 \approx x^9. \quad (7)$$

De asemenea se poate observa ca:

$$R[x^2]=R[x^3]=R[x^7]=R[x^9] =\{x^2, x^3, x^7, x^9\} \quad (8)$$

Rezulta ca taieturile prin elementele echivalente sunt egale si ca elementele asociate acestor taieturi constituie o submultime dintr-o partitie a lui S.

În mod similar, se pot gasi si celelalte submultimi rezultate prin partitionarea, de catre relatia R, în clase de echivalenta a multimii S:

$$R[x^1] = R[x^6] =\{x^1, x^6\};$$
$$R[x^4] =\{x^4\}; \quad (9)$$
$$R[x^5] = R[x^8] = R[x^{10}] =\{x^5, x^8, x^{10}\}.$$

Se obtin, în final, patru submultimi care sunt:

$$\{x^2, x^3, x^7, x^9\}, \{x^1, x^6\}, \{ x^4\}, \{x^5, x^8, x^{10}\} \quad (10)$$

si care constituie o partitie a multimii S.

Daca, în matricea $[R]$, coloanele si liniile se aranjeaza în ordinea urmatoare:

$$x^2, x^3, x^7, x^9, x^1, x^6, x^4, x^5, x^8, x^{10};$$

se obtine o matrice $[R]$ în care partitionarea pe clase de echivalenta este evidenta.

Claselor de chivalenta li se asociaza grupari patratice, dispuse simetric pe diagonala principala a matricei, dupa cum se poate vedea în matricea (11).

$$
[R]= \begin{array}{c|cccccccccc}
 & x^2 & x^3 & x^7 & x^9 & x^1 & x^6 & x^4 & x^5 & x^8 & x^1 \\
\hline
x^2 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x^3 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x^7 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x^9 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
x^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
x^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
x^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}
\end{array} \qquad (11)
$$

1.3. Închiderea tranzitiva a unei relatii reflexive si tranzitive

Compunând o relatie R, definita pe o multime S, cu ea însasi de k ori, se obtine relatia compusa: $R^k = \underbrace{R \bullet R \bullet \dots \bullet R}_{\text{de } k \text{ ori}}$. (12)

De remarcat faptul ca, la un anumit pas, adica de la o anumita valoare alui k, compunerea relatiei nu mai evolueaza, adica se închide. În acest caz, alti descendenti de grad mai mare ai relatiei R nu exista.

Închiderea tranzitiva a relatiei R se noteaza cu R^+ si daca multimea S este finita se calculeaza cu relatia:

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{card(S)} R^k. \qquad (13)$$

Pentru închiderea tranzitiva, matricea $[R^+]$, asociata acesteia, se obtine prin adunarea booleana a matricelor $[R], [R]^2, \dots, [R]^{card(S)}$:

$[R^+] = [R] + [R]^2 + [R]^3 + \dots + [R]^{card(S)}$. (14)

Daca în matricea (14), elementul aflat la intersectia liniei i cu coloana j are valoarea 1 înseamna ca, în cel mult $card(S)$ pa si, se realizeaza tranzitia de la elementul x^i la elementul x^j, adica pe graful relatiei R exista un lant ce leaga elementul x^i de elementul x^j.

Daca relatia este reflexiva, sau poate fi corectata, închiderea tranzitiva se poate studia cu matricea corectata (1). În acest caz, fiind vorba de operatii booleane, matricea închiderii tranzitive (14) se poate obtine printr-un numar mai mic de operatii.

Astfel, relatia:

$$(I + [R])^2 = I + [R] + [R]^2 \qquad (15)$$

este adevarata, deoarece, în binar, sunt valabile relatiile: 0+0=0 si 1+1=1. Acestea, la nivel matriceal, conduc la relatia:

$$[R] + [R] = [R]. \qquad (16)$$

În caz general, pentru $n \in N^*$, relatia (15) devine:

$$(I + [R])^n = I + [R] + [R]^2 + \dots + [R]^n. \qquad (17)$$

Practic, pentru determinarea matricei $[R^+]$ se calculeaza matricele:

$$(I + [R])^2 , (I + [R])^4 , (I + [R])^8 , \qquad (18)$$

pâna când este îndeplinita relatia:

$$(I + [R])^{2^{k+1}} = (I + [R])^{2^k} \qquad (19)$$

unde $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, finit.

Matricea data de prima valoare a lui k, pentru care relatia (19) este verificata, reprezinta matricea închiderii tranzitive asociata relatiei reflexive R.

Pentru ilustrare, se va considera un sistem cu evenimente discrete a carui matrice a starilor este data de relatia (20), unde, pentru simplificare, starile s-au notat cu numerele:1,2,...,8

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0	1	1	0	1	0	1	0	
2	0	0	0	0	0	1	1	0	
3	1	0	0	0	0	0	0	0	
[*R*]= 4	0	0	0	0	0	0	0	1	(20)
5	0	1	1	0	0	1	0	0	
6	0	0	0	1	0	0	0	1	
7	0	1	0	1	0	0	0	1	
8	0	0	0	1	0	1	0	0	

Rezulta matricea corectata:

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1	1	0	1	0	1	0	
2	0	1	0	0	0	1	1	0	
3	1	0	1	0	0	0	0	0	
I+[*R*]= 4	0	0	0	1	0	0	0	1	(21)
5	0	1	1	0	1	1	0	0	
6	0	0	0	1	0	1	0	1	
7	0	1	0	1	0	0	1	1	
8	0	0	0	1	0	1	0	1	

Calculând $(I+[R])^2$, se obtine:

	1	2	3	$\underline{4}$	5	$\underline{6}$	7	$\underline{8}$	
1	1	1	1	**1**	1	**1**	1	**1**	
2	0	1	0	**1**	0	1	1	**1**	
3	1	**1**	1	0	**1**	0	**1**	0	
$(I+[R])^2$= 4	0	0	0	1	0	**1**	0	1	(22)
5	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	**1**	
6	0	0	0	1	0	1	0	1	
7	0	1	0	1	0	**1**	1	1	
8	0	0	0	1	0	1	0	1	

Matricea $(I+[R])^2$ contine elemente unitare noi, care indica starile care, pe graful starilor, sunt accesibile în doi pasi, adica sunt legate prin lanturi formate din doua arce:

Continând calculul, rezulta:

	1	2	3	$\underline{4}$	5	$\underline{6}$	7	$\underline{8}$	
1	1	1	1	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	
2	0	$\underline{1}$	0	1	0	1	$\underline{1}$	1	
3	1	1	1	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	
$(I+[R])^4$= 4	0	0	0	1	0	1	0	1	(23)
5	1	1	1	**1**	1	**1**	1	**1**	
6	0	0	0	1	0	1	0	1	
7	0	$\underline{1}$	0	1	0	1	$\underline{1}$	1	
8	0	0	0	1	0	1	0	1	

Continuând acest proces, se calculeaza matricea $(I+[R])^8$ si se constata ca este egala cu matricea $(I+[R])^4$. Rezulta ca tranzitivitatea s-a închis si se pot cauta clasele de echivalenta induse de relatia R pe multimea starilor sistemului.

2. Algoritm pentru determinarea claselor de echivalenta

Determinarea claselor de echivalenta se poate face plecând de la matricea închiderii tranzitive (19), cu ajutorul urmatorului algoritm:

Pasul 1: Se identifica în matricea (19) liniile identice ce contin numarul maxim de elemente egale cu unitatea. Actiunile ce corespund acestor linii apartin acelea si clase de echivalenta S;

Pasul 2: Se suprima din matricea (19) liniile si coloanele corespunzatoare actiunilor ce apartin clasei de echivalenta S. Se continua cu pasul 1, pe matricea rezultata, pâna se epuizeaza toate liniile si coloanele.

Pentru exemplificare, se va aplica algoritmul de mai sus pe matricea (23), ata sata sistemului din exemplul din paragraful precedent.

Pasul 1: Cum liniile corespunzatoare starilor 1, 3 si 5 au toate elementele unitare, rezulta clasa de echivalenta: S_a={1, 3, 5};

Pasul 2: Suprimând în matricea (23) liniile si coloanele corespunzatoare starilor 1, 3 si 5, se obtine matricea (24).

Se continua cu pasul 1.

Pasul 1: În matricea (24), liniile corespunzatoare starilor 2 si 7 au toate elementele unitare. Rezulta clasa de echivalenta: S_b={2, 7};

Pasul 2: Se suprima în matricea (24) liniile si coloanele corespunzatoare starilor 2 si 7, se obtine matricea (25), dupa care, se continua cu pasul 1.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad (24)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & 6 & 8 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (25)$$

Pasul 1: În matricea (25), toate liniile au toate elementele sunt unitare. Rezulta clasa de echivalenta: S_c={4, 6, 8};

Pasul 2: Calculul claselor de echivalenta este terminat, deoarece din matricea (25) se elimina toate liniile si coloanele.

În total, se obtin trei clase de echivalenta: S_a={1, 3, 5} ; S_b={2, 7}; S_c={4, 6, 8}.

3. Relatii între clasele de echivalenta

Doua clase de echivalenta S_a si S_b se considera în relatie, adica $S_a<S_b$, daca exista cel putin un element $a\in S_a$ si cel putin un element $b\in S_b$ care sunt relatie, adica aRb. Evident, daca $S_a<S_b$ atunci oricare element din clasa S_a este în relatie cu oricare element din clasa S_b.

Daca doua clase de echivalenta S_a si S_b nu sunt în relatie, adica $S_a<>S_b$, rezulta ca oricare element $a\in S_a$ si oricare element $b\in S_b$ nu pot fi în relatie.

Pe baza acestor definitii, clasele de echivalenta pot fi impartite în doua categorii: clase de echivalenta care nu sunt în relatie si clase de echivalenta care sunt în relatie.

Determinarea relatiilor dintre clasele de echivalenta se poate face u sor daca, în matricea închiderii tranzitive x(19), liniile si coloanele sunt astfel aranjate încât elementele care apartin la aceea si clasa de echivalenta corespund la linii si, respectiv, coloane alaturate.

În cazul exemplului, aranjând liniile si coloanele matricei (23) în ordinea: 1, 3, 5, 2, 7, 4, 6, 8, se obtine matricea (26).

Faptul ca în matricea (26), la intersectia liniilor si coloanelor corespunzatoare claselor de echivalenta evidentiate anterior, exista elemente unitare, indica faptul ca între elementele claselor exista legaturi relationale.

De exemplu, dupa cum rezulta din matricea initiala (20), clasa de echivalenta S_a este în relatie cu clasa de echivalenta S_b datorita relatiilor existente între perechile de elemente: (1,2), (1,7) si (5,2). Luând în considerare si celelalte relatii dintre elemente, se obtine relatia de ordine dintre clasele de echivalenta:

$$S_a < S_b < S_c \quad (27)$$

Graful relatiei (27) este reprezentat în figura 4.

	1	3	5	2	7	4	6	8
1	**1**	**1**	**1**	1	1	1	1	1
3	**1**	**1**	**1**	1	1	1	1	1
5	**1**	**1**	**1**	1	1	1	1	1
2	0	0	0	**1**	**1**	1	1	1
7	0	0	0	**1**	**1**	1	1	1
4	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**
6	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**
8	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**

(26)

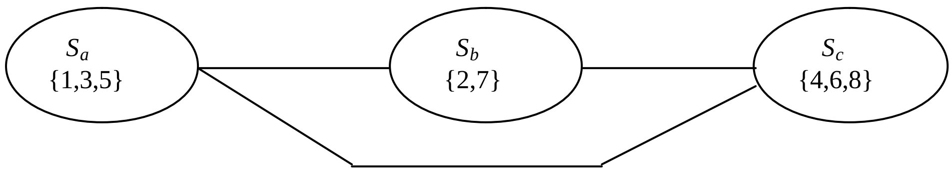

Fig. 4. Graful relatiei claselor de echivalenta.

Matricea asociata relatiei claselor de echivalenta este:

	S_a	S_b	S_c
S_a	1	1	1
S_b	0	1	1
S_c	0	0	1

(28)

Se observa ca în cazul acestui sistem, relatia dintre clasele de echivalenta este o relatie de ordine totala, adica exista arce antisimetrice directe, sau tranzitive, între toate clasele de echivalenta.

În figura 5 este prezentat graful relatiei *R*, în care elementele s-au grupat pe clase de echivalenta.

4. Legatura dintre clasele de echivalenta si existenta unui plan

Pentru un sistem cu evenimente discrete, atunci când se cunoa ste relatia starilor $R \subset S x S$, existenta unui plan care sa asigure tranzitia sistemului dintr-o stare initiala x^0 într-o stare finala x^f este echivalenta cu existenta unui lant care, pe graful relatiei *R*, leaga starea initiala x^0 de starea finala x^f.

Relatia asociata sistemului poate conduce la una sau mai multe relatii de ordine între clasele de echivalenta, relatii ce sunt determinate de existenta unor drumuri între clase, adica de existenta unor arce între stari, din clase diferite, cu rol de reprezentanti.

Informatiile obtinute prin construirea relatiilor de ordine, pe multimea claselor de echivalenta, sunt suficiente pentru a raspunde la întreabarea privind existenta unui plan de actiuni care sa asigure tranzitia unui sistem dintr-o stare initiala x^0 într-o stare finala x^f.

Un asemenea plan exista în unul din cazurile:

- Starile x^0 si x^f apartin uneia si aceleea si clase;
- Starile x^0 si x^f apartin unor clase diferite S^1 si S^2, dar este îndeplinita conditia $S^1<S^2$, pentru $x^0\in S^1$ si $x^f\in S^2$.

În primul caz, planul exista deoarece starile x^0 si x^f, apartinând aceleia si clase de echivalenta, sunt în relatie directa sau indirecta, prin tranzivitate. De exemplu, pentru sistemul cu graful reprezentat în figura 5, de la starea 3 la starea 1 exista o legatura directa, iar de la starea 3 la starea 5 exista o legatura indirecta, prin starea 1.

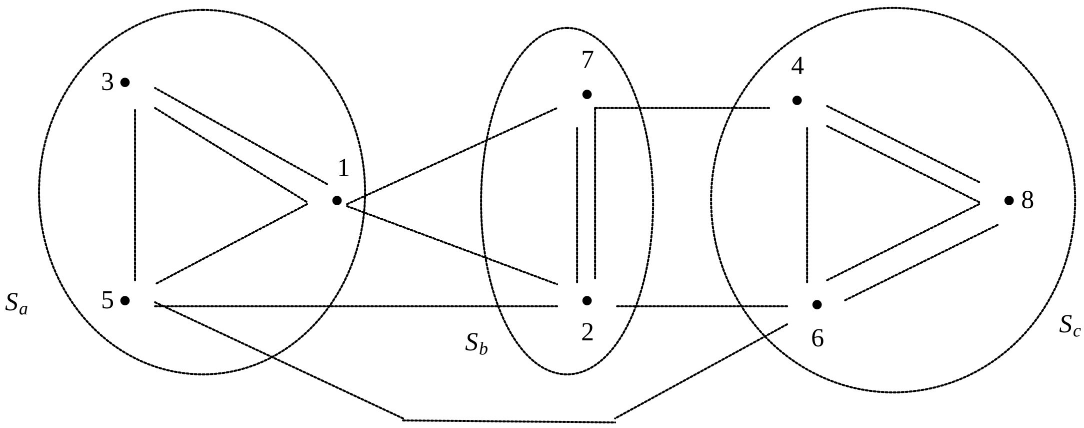

Fig. 4. Evidentierea claselor de echivalenta pe graful relatiei *R.*

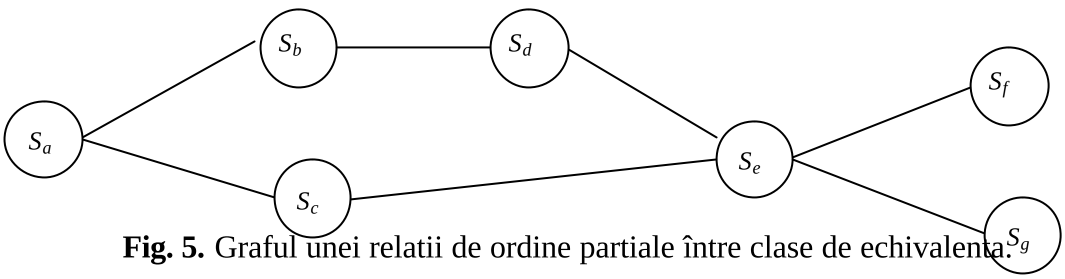

Fig. 5. Graful unei relatii de ordine partiale între clase de echivalenta.

În cazul în care starile x^0 si x^f apartin unor clase diferite dar aflate în relatie, planul exista deoarece starile x^0 si x^f sunt în relatie indirecta, prin tranzivitate. De exemplu (vezi figura 5), de la o stare $x^0\in S_a$ la o starea $x^f\in S_b$ exista legaturi indirecte, prin starile 1 sau 5.

Se mentioneaza ca nu în toate cazurile, între clasele de echivalenta, se stabile ste o relatie de ordine totala.

Pentru edificare, se va considera un exemplu de ordine partiala între multimile: S_a, S_b, S_c, S_d, S_e, S_f, S_g, cu graful reprezentat în figura6 iar matricea de echivalenta a acestuia este:

	S_a	S_b	S_c	S_d	S_e	S_e	S_g
S_a	1	1	1	1	1	1	1
S_b	0	1	**[0]**	1	1	1	1
S_c	0	**[0]**	1	**[0]**	1	1	1

S_d	0	0	**[0]**	1	1	1	1	(30)
S_e	0	0	0	0	1	1	1	
S_f	0	0	0	0	0	1	**[0]**	
S_g	0	0	0	0	0	**[0]**	1	

Matricea asociata grafului.
Se observa ca în acest caz lipsesc arcele antisimetrice (în matrice le corespund valorile **[0]**) dintre perechile de clase:

$(S_b, S_c), (S_g, S_f), (S_c, S_d)$. (31)

Rezulta ca daca $x^0 \in S_b$ si $x^f \in S_c$, nu exista un plan de la x^0 la x^f.
Cum între clasele de echivalenta se pot stabili urmatoarele relatii de ordine:

$S_a<S_b<S_d<S_e<S_f$;
$S_a<S_b<S_d<S_e<S_g$; (32)
$S_a<S_c<S_e<S_f$; $S_a<S_b<S_e<S_g$,

va exista un plan de la $x^0 \in S^1$ la $x^f \in S^2$, numai daca $S^1<S^2$, adica numai daca multimile S^1 si S^2 sunt amândoua elemente ale uneia din relatiile de ordine (31), de mai sus.

5. Utilizarea claselor de echivalenta la determinarea actiunilor independente

Dupa cum s-a aratat în cadrul paragrafului 1, relatia actiunilor M poate fi considerata reflexiva si, în acest caz, studierea problemei actiunilor independente se poate face pe o matrice corectata $[M_C]$, unde:

$[M_C]=I+[M]$ (33)

I este matricea unitate, iar $[M]$ este matricea asociata relatiei actiunilor.

Plecând de la relatia (33), se pot determina clasele de echivalenta si se pot stabili relatiile dintre acestea. Cum pentru doua actiuni a_1 si a_2 care apartin unor clase de echivalenta diferite S_1 si S_2, $a_1 \in S_1$ si $a_2 \in S_2$, pot sa apara doua situatii impuse de legaturile posibile dintre cele doua clase:

- $S_1<S_2$, si atunci actiunea a_1 trebuie executata înaintea actiunii a_2, sau
- $S_1<>S_2$, si atunci actiunile a_1 si a_2 pot fi executate în paralel,

rezulta ca o multime este formata numai din actiuni independente atunci când sunt îndeplinite conditiile:

- oricare doua actiuni ale multimii nu apartin la aceea si clasa de echivalenta si
- oricare doua clase ce contin actiuni din multimea respectiva nu sunt în relatie.

Observatiile de mai sus stau la baza determinarii multimilor formate numai din actiuni independente.

5.1. Exemplu de determinare a multimilor de actiuni independete

Pentru ilustrarea modului de determinare a multimilor de actiuni independete, se va considera un sistem pentru care matricea relatiei actiunilor este:

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0	0	0	1	0	0	1	0	
2	0	0	1	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	1	0	0	0	
$[M]$= 4	0	1	0	0	0	0	0	0	(34)
5	0	0	0	0	0	0	1	0	
6	0	0	0	0	0	0	1	0	
7	0	0	1	0	0	0	0	0	
8	1	0	0	0	0	1	0	0	

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	0	1	1	0	1	0	1	0	
3	0	0	1	0	1	0	1	0	
$(I+[M])^4=$4	0	1	1	1	1	0	1	0	(35)
5	0	0	1	0	1	0	1	0	
6	0	0	1	0	1	1	1	0	
7	0	0	1	0	1	0	1	0	
8	1	1	1	1	1	1	1	1	

unde actiunile sistemului a_1, a_2, …, a_8 s-au notat cu numerele: 1, 2, ..., 8.
Calculând matricea $(I+[M])^2$ se constata ca este egala cu matricea $(I+[M])^4$, deci matricea (35) reprezinta matricea închiderii tranzitive a relatiei *M*.
Cum tranzitivitatea s-a închis, cu ajutorul algoritmului prezentat în cadrul paragrafului 2, se pot cauta clasele de echivalenta. Se obtin astfel cinci clase de echivalenta:
S_a ={1,8}; S_b ={4}; S_c ={2}; S_d ={6}; S_e ={3,5,7}.
Grupând actiunile pe clase de echivalenta si aranjând clasele dupa numarul de elemente egale cu unitatea, se obtine matricea:

	1	8	4	2	6	3	5	7	
1	**1**	**1**	1	1	1	1	1	1	
8	**1**	**1**	1	1	1	1	1	1	
4	0	0	**1**	1	0	1	1	1	
$(I+[M])^4=$2	0	0	0	**1**	0	1	1	1	(36)
6	0	0	0	0	**1**	1	1	1	
3	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	
5	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	
7	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	

În matricea (36), la intersectia liniilor si coloanelor corespunzatoare claselor de echivalenta, exista elemente egale cu unitatea numai daca între elementele claselor exista legaturi relationale. Se constata ca exista doua relatii de ordine:

$$S_a < S_b < S_c < S_e \quad \text{si} \quad S_a < S_d < S_e.$$

Cum clasa de echivalenta S_d nu este în relatie cu clasele S_b si S_c, rezulta urmatoarele doua multimi de actiuni independente: $\{a_4, a_6\}$ si $\{a_2, a_6\}$.

6. Concluzii

Lucrarea a avut ca scop atragerea unor formalisme din teoria relationala a multimilor (prin construirea claselor de echivalenta) pentru analiza sistemelor de productie bazate pe actiuni. Originalitatea lucrarii consta în descrierea matriciala a unor asemenea sisteme. Principalul rezultat al lucrarii vizeaza un algoritm algebric de construire a închiderii tranzitive asociate relatiei care defineste sistemul dat iar pe aceasta baza, a actiunilor independente (care se pot executa în paralel). Totodata, metoda ofera posibilitatea verificarii prealabile a existentei unui plan, compus din actiuni disponibile, care sa aduca sistemul de productie dintr-o stare initiala prescrisa într-o stare finala data.

Bibliografie

1. Gh.Bordea, M.Tertisco, J.Culita *A relational formalism for describing planning problem*, Proceedings of the 3rd International Symposium of Economic Informatics, pp.788-794,Bucharest,Mai 1997
2. A.Tertisco *Elemente fundamentale ale stiintei calculatoarelor*, Editura Hyperion 1997.