Verificarea eterogenității unui portofoliu de contracte de asigurare prin metode statistice clasice

Asist. Virginia ATANASIU,
Catedra de matematică, A.S.E.

În cadrul articolului, definim conceptul de eterogenitate a unui portofoliu de contracte de asigurare, cu toate elementele pe care acesta le implică, dat fiind importanța sa în modelele de credibilitate din domeniul asigurărilor non-viață, reușind astfel o abordare din punct de vedere probabilistică și statistică a noțiunii respective. Totodată, oferim cititorului o modalitate prin care se poate atesta sau nu eterogenitatea într-un portofoliu, luând un exemplu din practica asigurărilor. Studiul relevă modul în care matematicile aplicate în economie intervin cu succes în soluționarea problemelor dificile cu care se confruntă actuarii în analizarea asigurărilor din perspectiva credibilității lor.
Cuvinte cheie: *risc, parametru de risc, eterogenitate, contracte (polițe) de asigurare, portofoliu.*

Acest articol își propune să ilustreze printr-un exemplu practic, datorat actuarilor Hogg și Klugmann modul în care statistica clasică poate verifica eterogenitatea unui portofoliu de contracte de asigurare.

Înainte de a trece la prezentarea aplicației sus-menționate, vom realiza o descriere a unui portofoliu eterogen de contracte de asigurare, dat fiind că subiectul materialului vizează acest concept fundamental în asigurările non-viață.

În acest sens, fie un colectiv (portofoliu) de k polițe (contracte) de asigurare, fiecare dintre ele implicând un risc **i**, de parametru θ_i, unde $i=\overline{1,k}$. Riscul atașat unei polițe este presupus a fi de tip economic; mai precis, este vorba despre un risc de sinistru (de pagubă) constând dintr-o pierdere monetară. Riscul economic, adică riscul de sinistru care conduce la o pierdere financiară sau daună este asimilat cu o variabilă aleatoare nenegativă; riscurile negative nu sunt realiste în asigurările non-viață. Prin parametrul de risc al unei polițe se înțelege o variabilă aleatoare reală, care conține caracteristicile riscului luat în considerație. În cele ce urmează vom admite ca parametrul de risc al unei polițe să reprezinte toate caracteristicile de risc, care nu pot fi direct observabile, deci care sunt aproape imposibil de evaluat (de descris) precum și pe cele a căror folosire nu este permisă de societate. Caracteristicile de tipul "nu pot fi observate" (caracteristicile "inobservabile") sunt caracteristici precum: îndemânarea la conducere și temperamentul celui care conduce (din asigurările de pagube la "automobile" și asigurările de pagube la "transporturi"), starea de sănătate și înclinația către accidente (din asigurările de accidente (dezastre)). Caracteristicile de tipul "sunt periculoase din punct de vedere politic și nu ar fi înțelese de clienți și autorități" sunt caracteristici a căror folosire nu este permisă de societate; în acest sens, putem da ca exemplu: culoarea mașinii (în asigurările contra avariilor auto), sexul deținătorului poliței.

Parametrii de risc θ_i, unde $i=\overline{1,k}$ generează eterogenitatea colectivului de contracte, datorită modului în care aceștia au fost definiți. Eterogenitatea este modelată din punct de vedere probabilistic prin introducerea unei variabile aleatoare θ, dând o valoare diferită parametrului de risc pentru fiecare contract. Dacă θ dă valoarea θ_i parametrului de risc θ_i, atunci afirmația făcută anterior trebuie înțeleasă astfel: $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \ldots \neq \theta_k$ (valoarea dată de θ parametrului de risc diferă de la un contract la alt contract). Numim θ variabilă de structură a portofoliului sau parametrul de risc de bază implicat de portofoliul eterogen pentru riscurile individuale, iar $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ parametrii abstracți ai riscurilor 1,2,...,k. De fapt,

parametrii abstracți θ_i, $i=\overline{1,k}$ sunt realizările diferite ale parametrului de risc θ pentru fiecare contract al portofoliului.
În concluzie, portofoliul este eterogen, deoarece parametrii abstracți θ_i ai fiecare risc i, $i=\overline{1,k}$ nu sunt aceiași; variația lui θ în portofoliu, manifestată prin aceea că $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \ldots \neq \theta_k$ se datorează parametrilor de risc θ_i, $i=\overline{1,k}$.
În aceste condiții, pentru riscul X al unui contract individual (risc reprezentat printr-o variabilă aleatoare nenegativă) se consideră repartiția sa condiționată, dată fiind valoarea θ a parametrului de risc θ (cu θ s-a notat valoarea lui θ dată parametrului de risc al contractului respectiv). Deci este vorba de repartiția variabilă aleatoare condiționate $(X|\theta=\theta)$.
Să presupunem că X se află sub observație și că studiul statistic efectuat a durat un număr de t ani, astfel încât, dispunem acum de un trecut statistic asupra lui X concretizat în variabilele aleatoare observabile $X_1, X_2, \ldots, X_t$.
Așadar, contractul individual constă în mulțimea de variabile aleatoare: parametrul aleator de structură corespunzător lui și variabilele aleatoare de observație $X_1, X_2, \ldots, X_t$.
Se obișnuiește ca prin $\underline{X}'$ să se noteze vectorul observațiilor efectuate asupra lui X, adică $\underline{X}'=(X_1, X_2, \ldots, X_t)$, astfel încât contractul poate fi reprezentat printr-un vector aleator de componente: variabila de structură a contractului și $\underline{X}'$. Componentele vectorului $\underline{X}'$ sunt variabile aleatoare dependente, în sensul că depind de valoarea θ dată de θ parametrului de risc al contractului respectiv, fiind independente și identic distribuite condițional, adică dată fiind valoarea θ atribuită de θ parametrului de risc al contractului respectiv.
Admitem că parametrul de risc al unui contract individual rămâne același în timp; se spune că acesta este stabil (constant) în timp sau că volumul riscului este același pentru toți anii.
Descrierea realizată pentru portofoliul eterogen de k contracte cu riscuri stabile în timp poate fi redată prin diagrama din figura 1.

Contract:		<u>1...j...k</u>		
Variabila de structură a contractului:				$\underline{\theta}_j$
Variabile de observație asupra contractului [ani]	d	1	X_{j1}	
	u	2	X_{j2}	
	r	.	.	
	a	.	.	
	t	.	.	
	a	t	X_{jt}	

Fig. 1. Portofoliul eterogen de k contracte cu riscuri stabile în timp.

Modelul portofoliului eterogen reprezentat în diagrama de mai sus constă în: variabilele de structură θ_j și variabilele observabile X_{jr}, unde $j=\overline{1,k}, r=\overline{1,t}$. Contractul j constă în mulțimea de variabile: θ_j (variabila aleatoare structurală a sa) și $X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}$ (variabilele observabile ale riscului implicat de contractul j), unde $j=\overline{1,k}$; cu alte cuvinte, contractul j este vectorul aleator de componente θ_j și $\underline{X}'_j$: $(\theta_j, \underline{X}'_j)$, unde:

$$\underline{X}'_j \overset{not}{=} (X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}).$$

Pentru fiecare contract j şi pentru $\theta_j = \theta_j$ (θ_j fixat) variabilele aleatore $X_{j1}, X_{j2},..., X_{jt}$ sunt independente şi identic distribuite ($j=\overline{1,k}$).

Independenţa condiţională a variabilelor $X_{j1}, X_{j2},..., X_{jt}$, dat fiind că $\theta_j=\theta_j$ se scrie astfel:

$$P\left[\bigcap_{r=1}^{t}(X_{jr}|\theta_j=\theta_j)<x_{jr}\right]=\prod_{r=1}^{t}P\left[\left(X_{jr}|\theta_j=\theta_j\right)<x_{jr}\right]\ (\forall)x_{jr}\in\mathbf{R}_+, r=\overline{1,t}\left(j=\overline{1,k}\ fixat\right)$$

Egalitatea de mai sus descrie independenţa de la an la an (independenţa de timp) a riscurilor condiţionate ($X_{jr} | \theta_j = \theta_j$), $r=\overline{1,t}$ ale contractului j.

Portofoliul este eterogen datorită realizărilor diferite ale parametrului de risc θ_j pentru fiecare contract.

Acum trecem să ilustrăm modul în care metodele statistice clasice pot confirma sau infirma eterogenitatea unui portofoliu de contracte, prin prisma exemplului lui Hogg şi Klugmann. Aceştia consideră două contracte, ale căror riscuri X, respectiv Y urmează o repartiţie de tip Pareto. Aşadar, X are densitatea de repartiţie:

$$f(x,\theta_1)=\theta_1(1+x)^{-\theta_1-1}\ ,\ x>0, \theta_1>0,$$

iar Y are densitatea de repartiţie:

$$f(y,\theta_2)=\theta_2(1+y)^{-\theta_2-1}\ ,\ y>0, \theta_2>0,$$

cu $\theta_1 \neq \theta_2$ (unde θ_1, θ_2 reprezintă parametrii abstracţi ai celor două riscuri).

Să presupunem că riscurile implicate de cele două contracte se află sub observaţie (cercetare) statistică şi că studiul statistic asupra lui X a durat m ani, iar asupra lui Y n ani, astfel încât, acum dispunem de un trecut statistic referitor la X constând în variabilele aleatoare observabile $X_1, X_2,...,X_m$, respectiv de un trecut statistic referitor la Y constând în variabilele aleatoare observabile Y_1, Y_2, ...,Y_n.

Întrebarea care se pune în legătură cu acest exemplu este dacă cele două riscuri sunt sau nu omogene. Răspunsul poate fi dat de statistica clasică.

Ipoteza omogenităţii riscurilor se formulează astfel: $\theta_1=\theta_2$ (adică parametrii abstracţi θ_i, pentru fiecare risc i, $i=\overline{1,2}$ sunt aceeaşi, nu diferă semnificativ d.p.d.v. statistic, ci doar întâmplător). Notăm ipoteza pe care o avem de verificat cu H_0 şi o numim ipoteza nulă sau fundamentală.

Ipoteza contrară ipotezei H_0 se formulează astfel: $\theta_1 \neq \theta_2$ (adică parametrii abstracţi θ_i pentru fiecare risc i, $i=\overline{1,2}$ nu sunt aceeaşi; ei diferă semnificativ din punct de vedere statistic) şi se notează cu H_1, numindu-se ipoteza alternativă ipotezei H_0.

Verificarea perechii de ipoteze (H_0, H_1) se face la un prag de semnificaţie $\alpha>0$ foarte mic, dat şi pe baza "testului raportului de verosimilitate". Aplicarea acestui criteriu decizional constă în parcurgerea următoarelor etape:

<u>Etapa I</u>: Se determină estimaţiile de verosimilitate maximă ale parametrilor abstracţi de risc θ_1,θ_2, notate cu $\hat{\theta}_1$, respectiv $\hat{\theta}_2$ precum şi estimaţia de verosimilitate maximă a parametrului comun θ, notată cu $\hat{\theta}$, aceasta din urmă având sens dacă ipoteza H_0 este adevărată, caz în care $\theta_1=\theta_2=\theta$ (deci θ reprezintă valoarea comună necunoscută a celor doi parametrii abstracţi θ_1 şi θ_2 din ipoteza H_0, când H_0 este adevărată). În acest sens, construim funcţiile de verosimilitate corespunzătoare tuturor observaţiilor efectuate asupra variabilelor aleatoare X şi Y, notate cu $L(\theta_1,\theta_2)$ şi respectiv $L(\theta)$; de fapt, $L(\theta)$ nu este altcineva decât $L(\theta_1,\theta_2)$ când H_0 este adevărată (când $\theta_1=\theta_2=\theta$). Astfel:

$$L(\theta_1,\theta_2)=\theta_1^m\cdot\theta_2^n\cdot\left[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)^{-\theta_1-1}\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^{n}(1+y_j)^{-\theta_2-1}\right],$$

de unde obţinem şi pe $L(\theta)$, făcând $\theta_1=\theta_2=\theta$:

$$L(\theta)=\theta^{m+n}\cdot\left[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)^{-\theta-1}\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^{n}(1+y_j)^{-\theta-1}\right],$$

Aplicând metoda verosimilității maxime, rezultă că:

$\hat{\theta}_1 = m/U; \hat{\theta}_2 = n/V; \hat{\theta} = (m+n)/(U+V)$,

unde : $U \overset{not}{=} \sum_{i=1}^{m} \ln(1+x_i)$; $V \overset{not}{=} \sum_{j=1}^{n} \ln(1+y_j)$.

Etapa a II-a: Se construiește statistica testului raportului de verosimilitate; aceasta este notată cu λ și este definită ca raportul dintre valoarea maximă a funcției de verosimilitate $L(\theta_1,\theta_2)$, adică $L\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$ și valoarea maximă a funcției de verosimilitate $L(\theta)$, adică $L\left(\hat{\theta}\right)$; facem mențiunea că λ fiind statistică este variabilă aleatoare, astfel încât, acum interpretăm estimatorii $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ și $\hat{\theta}$ drept variabilele aleatoare:

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = m/U; \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = n/V; \hat{\boldsymbol{\theta}} = (m+n)/(U+V)$,

unde : $U \overset{not}{=} \sum_{i=1}^{m} \ln(1+X_i)$; $V \overset{not}{=} \sum_{j=1}^{n} \ln(1+Y_j)$.

Prin urmare:

$$\lambda = \mathbf{L}\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)/\mathbf{L}\left(\hat{\theta}\right) = m^m n^n (U+V)/\{(m+n)^{m+n} U^m V^n\}$$

respectiv $\dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_i} = 0$ unde i=1,2 și

$\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$.

Etapa a III-a: Definim statistica: $F = \dfrac{n}{m} \cdot U/V$; dacă ipoteza H_0 este adevărată atunci: $\theta_1=\theta_2=\theta$ și în aceste condiții putem rescrie statistica F sub forma următoare: $\mathbf{F} = \{2\theta U/2m\}/\{2\theta V/2n\}$.

Variabilele aleatoare independente ($2\theta U$) și ($2\theta V$) având repartiții de tip χ^2 cu (2m) și respectiv (2n) grade de libertate, rezultă că statistica F are o repartiție Fisher-Snedecor cu (2m,2n) grade de libertate.

Testul raportului de verosimilitate respinge ipoteza H_0 a omogenității riscurilor, adică acceptă ipoteza H_1, ceea ce înseamnă că portofoliul de două contracte nu poate fi considerat omogen, deci este eterogen, dacă λ_{calc} depășește un anumit prag (nivel) c ($\lambda_{calc}>c$). Întrucât λ_{calc} are o expresie complicată, recurgem la F_{calc} pentru a lua decizia referitoare la ipoteza nulă H_0 (F_{calc} are avantajul unei expresii simple).

Decizia de respingere a ipotezei H_0, anume: $\lambda_{calc}>c$ o înlocuim cu $F_{calc}<c_1$, dacă $0<F_{calc}<1$ sau $F_{calc}>c_2$, dacă $F_{calc}>1$, deoarece λ descrește pentru $F\in(0,1)$ și crește pentru $F\in(1,\infty)$; monotonia lui λ în raport cu F rezultă, interpretând λ ca funcție de F ($\lambda=\lambda(F)$) și studiind semnul derivatei acesteia; se observă imediat că λ, ca funcție de F, se exprimă astfel:

$$\lambda = \lambda(F) = m^m n^n (m+n)^{-m-n} \left(\frac{m}{n}F\right)^{-m} \left(1+\frac{m}{n}F\right)^{m+n}.$$

Numerele c_1 și c_2 se determină folosind criteriul cozilor egale și definiția pragului (nivelului) de semnificație α, ceea ce înseamnă că c_1 și c_2 verifică egalitățile:

$$P(F<c_1)=P(F>c_2)=\frac{\alpha}{2},$$

din care: $c_1 = F_{\frac{\alpha}{2};2m,2n}$ și $c_2 = F_{1-\frac{\alpha}{2};2m,2n}$.

Pentru valorile lui F_{calc} din intervalul șc_1,c_2ț ipoteza nulă H_0 se acceptă ,deci se poate presupune că ambele riscuri au același parametru. Așadar are sens gruparea împreună a contractelor, deoarece sunt caracterizate prin parametru de risc egal (comun).

Bibliografie

1. Goovaerts, M.J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A.E., Bauwelinckx, T. (1990); Insurance Series, volume 3, Effective Actuarial Methods, University of Amsterdam, The Netherlands.

2. Pentikäinen, T., Daykin, C.D., Pesonen, M. (1990); Practical Risk Theory for Actuaries, Université Pieré et Marie Curie.

3. Sundt, B. (1984); An Introduction to Non-Life Insurance Mathematisc, Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim Band 28 (V.V.W Karlsruhe).