Utilizarea fractalilor în compresia de date

Prof.dr. Ion IVAN, prep. Daniel VERNIŞ, ec. Elena ZERFUS
Catedra de Informatică Economică, A.S.E., Bucureşti

Descrierea obiectelor geometrice cu forme complexe care necesită reprezentarea lor pe ecranul calculatorului, în scopul recunoaşterii şi identificării formelor din natură, este foarte dificilă şi în acelaşi timp foarte costisitoare. Tocmai de aceea studiile privind reprezentarea unor forme geometrice complexe, cu ajutorul unor funcţii matematice, sunt reluate acum după aproape 100 de ani de cînd s-au facut primele încercări în acest sens.
Cuvinte cheie: *compresie de date, fractali.*

1. Introducere

Studiile au condus la concluzia că viaţa însăşi este susţinută pe baza teoriei fractale. De exemplu, generarea unor forme de viaţă se face cu ajutorul informaţiilor genetice conţinute în nucleu, prin repetarea la diferite scări a celulelor sau a structurilor celulare.
S-a ajuns la concluzia că teoria fractalilor este importantă nu numai pentru generarea unor forme din natură pe ecranul calculatorului, dar mai ales pentru înţelegerea şi studierea fenomenelor şi proceselor fizice, economice, sociale şi biologice. Descrierea acestor fenomene şi procese din realitate este mult mai fidelă cu ajutorul modelării matematice prin teoria fractalilor.

2. Clasificarea fractalilor

Din punctul de vedere al modului de generare, fractalii se împart în:
– fractali naturali, existenţi în natură sau care sunt creaţi în urma unor procese naturale. De exemplu: munţii, ţărmurile, sistemul nervos, arborii, sistemul de ramificaţii al bronhiilor etc.
– fractali artificiali, modele informatice ale fractalilor naturali, întilniţi şi sub denumirea de seturi de fractali sau ansambluri de fractali.
Din punctul de vedere al transformărilor care stau la baza generării fractalilor, aceştia se împart în :
– fractali liniari, care sunt generaţi cu ajutorul transformărilor geometrice liniare aplicate asupra unor puncte, segmente suprafeţe sau corpuri. De exemplu, curbele Von Koch, care se bazează pe următoarea transformare:
- se pleacă de la un triunghi echilateral cu latura avînd o lungime finită;
- fiecare latură este secţionată în trei părţi egale, segmentul din mijloc se elimină şi se înlocuieşte cu un unghi ale cărui laturi sunt două segmente egale cu segmentul eliminat (figura 1).

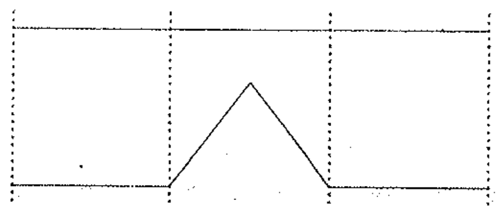

Fig. 1. Curba Koch, prima iteraţie

- pentru fiecare segment al figurii obţinute se repetă operaţia anterioară.

Dacă se porneşte de la un triunghi echilateral, se obţine o linie poligonală închisă, cu latura din ce în ce mai mică. Fractalii liniari pot fi la rîndul lor artificiali sau naturali.
– fractali neliniari, care se obţin cu ajutorul transformărilor geometrice neliniare (pot fi artificiali sau naturali). Fractalii neliniari se împart, în funcţie de transformarea care stă la baza generării lor, în:
– fractali autopătratici, care sunt obţinuţi cu ajutorul generatorului pătratic z^2+c unde z şi c sunt numere complexe. De exemplu, mulţimea Mandelbrot este generată astfel: se consideră un plan complex, în care se explorează un domeniu rectangular complex de laturi lx şi ly, cu colţul stînga jos (x_0,y_0). Un punct curent din acest domeniu va fi

notat cu z_0 iar fiecărui punct z i se aplică următoarea transformare :

$$T : D \rightarrow D_1$$
$$T(z)=z^2+z$$

Pe parcursul acestor iteraţii se testează modulul numărului T(z):
$M^2=[Im(z)]^2+[Re(z)]^2$, unde Im(z) reprezintă partea imaginara a lui z; Re(z) reprezintă partea reala a lui z.
Dacă după un număr de iteraţii n, M<2 atunci z_0 va aparţine mulţimii Mandelbrot.
– fractali de autoinversiune, care se obţin prin aplicarea unor transformări geometrice inverse unor puncte, segmente, suprafeţe sau corpuri.
Fractalii artificiali se împart la rîndul lor în:
– fractali aleatori, care sunt generaţi aleator utilizînd procese stohastice. Structurile fractale în natură sunt aleatoare, dar este folositor să studiem fractalii determinişti care sunt generaţi iterativ într-un mod determinat.
– fractali determinişti, prin studierea cărora ne putem apropia de proprietăţile fractalilor aleatori.

3. Transformări în teoria fractală

Dezvoltarea aplicaţiilor în domeniul teoriei fractalilor a dus la creşterea interesului pentru cercetările din domeniul compresiei de date şi de imagine.
În cadrul tehnicilor de compresie a imaginilor, o metodă bazată pe teoria Sistemelor de Funcţii Iterative (IFS) a captat atenţia specialiştilor în ultimii ani. Scopul acestei tehnici, cunoscută sub numele de *problema fractală inversă* este de a găsi un IFS al cărui atractor este cît mai apropiat de imaginea sursă. Singura limitare a acestei metode este că se obţin timpi de compresie de 30 pînă la 60 de minute, în funcţie de imaginea compresată. Algoritmii de compresie cu fractali sunt bazaţi pe două transformări din teoria fractală: transformarea de autosimilaritate şi transformarea afină sau de înrudire a părţilor cu întregul.
Autosimilaritatea este definită în teoria fractală ca fiind proprietatea unui obiect de a avea orice detaliu al sau asemănător cu întregul la orice scară.

În continuare se prezintă cîteva definiţii:
1. O transformare $W:R^n \rightarrow R^n$ *afină* este o transformare de forma W(x) = T(x) + b, unde T este o transformare liniară pe R^n şi $b \in R^n$ este un vector.
2. O funcţie $W:D \rightarrow D, D \subseteq R^n$ este denumită contracţie pe D, dacă există un număr real c, cu valori în intervalul (0,1), astfel încît $d(W(x),W(y)) \leq c \cdot d(x,y)$, pentru x,y din D şi pentru o metrică d definită pe R^n. Numărul real c este denumit în acest caz *contractivitatea* lui W.
3. Dacă $d(W(x),W(y)) = c \cdot d(x,y)$, atunci funcţia W definită anterior este numită *similaritate*.
O familie de contracţii $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ este cunoscută sub numele de schemă sau sistem de funcţii iterative (IFS). Dacă există un subset $F \subseteq D$, astfel încît pentru un IFS $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, $F = \bigcup_{i=1}^{m} \omega_i(F)$, atunci F este un *invariant* pentru acest IFS. Dacă F este un invariant pentru o colecţie de similarităţi, F este cunoscut sub numele de set autosimilar.
Fie S clasa tuturor submulţimilor continue, nenule din D. Se defineşte un corpul δ pe mulţimea $A \in S$, ca fiind mulţimea punctelor din A cu proprietatea:

$$A_\delta = \{x \in D : |x - a| \leq \delta, a \in A\} .$$

Să definim distanţa dintre două mulţimi de puncte d(A,B) ca fiind:

$$d(A,B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \wedge B \subset A_\delta\}$$

Distanţa dintre funcţii este cunoscută sub denumirea de metrica Hausdorff pe mulţimea **S**. Se pot folosi şi alte funcţii de distanţă între două mulţimi.
Fiind dat un IFS $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, există un singur set invariant F, astfel încît $F = \bigcup_{i=1}^{m} \omega_i(F)$, atunci setul F este *atractorul* sistemului.
Dacă E este o submulţime compactă şi nevidă astfel încît $\omega_i(E) \subset E$ şi $W(E) = \bigcup_{i=1}^{m} \omega_i(E)$, vom defini iteraţia de ordin k a lui W, $W^k(E)$, ca fiind:

$$W^0(E) = E, W^k(E) = W(W^{k-1}(E)).$$

Pentru $1 \le k$, vom avea $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} W^k(E)$.

Secvenţa de iteraţii $W^k(E)$ este convergentă spre atractorul sistemului pentru orice mulţime E. Aceasta înseamnă că putem avea o familie de contracţii care aproximează imagini complexe şi, folosind această familie de contracţii, imaginile pot fi memorate şi transmise într-un mod eficient. Odată definit un IFS putem obţine imaginea compresată de acesta. Dacă se doreşte compresia unei imagini arbitrare în acest mod, trebuie să găsim mai întîi o familie de contracţii, astfel încît atractorul imaginii să fie cea mai fidelă aproximare posibilă a imaginii. *Teorema colajului* a lui Barnsley defineşte cît de bine poate aproxima un atractor o imagine: fiind dat un set de contracţii $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ pe R^n astfel încît

$$|w_i(x) - w_i(y)| \le c \cdot |x - y|, \forall x, y \in R^n \wedge \forall i,$$

cu $c<1$; fie $E \subset R^n$ o mulţime compactă şi nevidă; atunci: $d(E,F) \le d(E, \bigcup_{i=1}^{m} w_i(E)) \frac{1}{(1-c)}$, unde F este o mulţime invariantă pentru ω_i şi **d** este metrica Hausdorff.

Ca o consecinţă a acestei teoreme, orice submulţime a lui R^n poate fi aproximată cu o toleranţă sau eroare arbitrară de un set autosimilar. De exemplu, fiind dat $\delta > 0$, există un set de contracţii $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ pentru o similaritate W, cu un set invariant F care satisface condiţia $d(E,F) < \delta$.

Problema găsirii unui IFS $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ al cărui atractor F este foarte apropiat de o imagine dată I este echivalentă cu minimizarea distanţei $d(I, \bigcup_{i=1}^{m} w_i(I))$.

4. Algoritmi de compresie a imaginilor cu fractali

Ideea utilizării fractalilor în compresia imaginilor aparţine cercetătorului M.F. Barnsley. Algoritmul propus de el lucrează prin divizarea imaginii într-o reţea de blocuri domeniu nesuprapuse $D = \{D_i\}$ de B*B pixeli şi în blocuri rang $R = \{R_i\}$ de dimensiune 2B*2B pixeli.

Pe baza celor două tipuri de blocuri se generează un IFS de transfer al blocurilor rang în blocuri domeniu. Pentru fiecare R_i se realizează o căutare exhaustivă pentru găsirea blocului domeniu D_i din D care aproximează cel mai bine rangul. Se memorează pentru fiecare bloc rang R_i câte o valoare w_{ijk} constînd din coordonatele (x,y) ale blocului domeniu D_i folosit, luminozitate, schim-bările sau transformările efectuate asupra acestui bloc pentru a se realiza o copie cît mai fidelă a rangului R_i.

Algoritmul de determinare a valorii w_{ijk} este prezentat mai jos în pseudocod :

```
dmin ← ∞
for toate blocurile rang nesuprapuse Ri din R
  for toate posibilele domenii Dj din D
    for toate cele k posibile transformări
      wijk ia valoarea aproximării lui Ri folo-
          sind Dj
      dijk ← distanta(Ri, wijk(Dj));
      if dijk < dmin then dmin ← dijk
      wi ← wijk
  scrie wi;
```

O caracteristică atractivă a compresiei de imagini cu fractali este independenţa faţă de rezoluţie a imaginii decompresate. La decompresie, nu este necesar ca dimensiunile imaginii decompresate să fie aceleaşi ca cele ale imaginii iniţiale. Dimensiunile blocurilor transformate nu fac parte din procesul de compresie. De aceea, ele pot fi schimbate. Dacă imaginea este decompresată la o dimensiune mai mare decât mărimea originală, se generează prin algoritm detalii acceptabile pentru ochiul uman.

Algoritmul lui Barnsley lucrează bine cînd este paralelizat sau este codificat hardware dar, în general, are nevoie de un timp foarte mare pentru compresia imaginilor (figura 2). Jaquin a introdus o clasificare a blocurilor (blocuri de mărginire a imaginii, blocuri din mijlocul imaginii şi blocuri umbră), astfel încât căutarea unui bloc rang să fie făcută numai între blocurile domeniu de aceeaşi categorie. Aceasta oferă algoritmului o îmbunătăţire a performanţei prin reducerea căutării exhaustive pentru fiecare bloc.

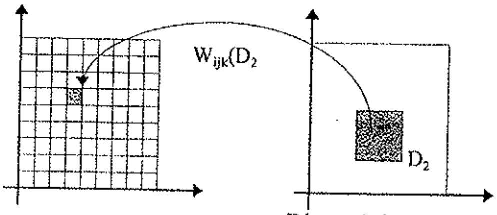

Fig. 2. Algoritmul Barnsley

Algoritmul lui Jaquin este prezentat în continuare:

for toate blocurile rang nesuprapuse R_i din R
    clasifică în margine, mijloc sau umbră
for toate posibilele domenii D_j din D
    clasifică în margine, mijloc sau umbră
$d_{min} \leftarrow \infty$
for toate blocurile rang nesuprapuse R_i di R
  for toate posibilele domenii D_j din D de
      aceeaşi categorie
    for toate cele k posibile transformări
      if w_{ijk} poate conduce D_j printr-o serie de
        transformări la o aproximare a a lui R_i
          $d_{ijk} \leftarrow$ distanta(R_i, $w_{ijk}(D_j)$);
          if $d_{ijk} < d_{min}$ then $d_{min} \leftarrow d_{ijk}$
            $w_i \leftarrow w_{ijk}$
        scrie w_i;

Acest algoritm a deschis calea unor cercetări de reducere a spaţiului de căutare a blocurilor similare. În detaliu, transformările aplicate unei imagini sursă sunt:

– scalarea blocului domeniu pentru a se potrivi cu blocul rang, în general o reducere de la 16*16 la 8*8 sau 4*4;

– una din 8 izometrii (figura 3) folosite pentru minimizarea erorilor reziduale dintre rang şi domeniu, transformă un bloc;

Aceste două transformări sunt cunoscute sub numele de transformări geometrice.

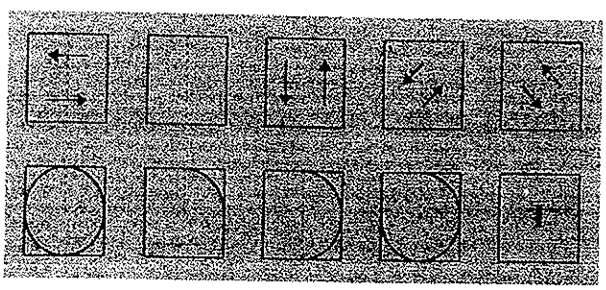

Fig. 3. Izometrii

– scalări neomogene de luminozitate, care se aplică fiecărui pixel din blocul domeniu parţial transformat după formula $r(i,j) = \alpha \cdot d(i,j) + \beta$, unde r(i,j) indică pixelul rezultat; α controlează contrastul şi β controlează luminozitatea;

Această transformare este denumită transformarea de masă.

– transformarea blocului domeniu într-o mască pentru blocul rang.

5. Performanţele compresiei cu fractali

Pentru testarea performanţelor algoritmului se foloseşte fişierul castel.tga. Timpul de compresie obţinut este de 16 minute.

Procesul de decompresie se realizează iterativ. La fiecare iteraţie se realizează o îmbunătăţire a calităţii imaginii.

Fişierul imagine castel.tga are o refacere rapidă în procesul de decompresie, el fiind parţial reconstituit după cinci sau şase iteraţii (figura 4). Pierderea de informaţie la compresie este de circa 2-3% în cazul acestei imagini, după o decompresie de 16 iteraţii. Rata de compresie a imaginii este de 43.75%, obţinîndu-se un cîştig de spaţiu de memorie de 56.25%, care este comparabil în aceste cazuri cu gradul de compresie obţinut la compresia imaginilor cu ajutorul algoritmilor de compresie fără pierdere de informaţie. Performanţele algoritmilor de compresie cu fractali sunt vizibile în cazul fişierelor de dimensiuni foarte mari. De exemplu, pentru un fişier imagine Targa, avînd dimensiunile 1024*768 în nuanţe de gri (grayscale), cu o lungime de 786450 de octeţi, se obţine un fişier compresat cu lungimea de 36004 octeţi.

În acest caz se obţine o rată de compresie de 4.578%, adică de aproape 22:1. Compresia obţinută în acest caz este foarte bună, însă timpul de compresie este de 214 minute. Trebuie realizat un compromis între gradul de compresie şi timpul necesar compresiei. Pentru a obţine o calitate bună a imaginii la decompresie trebuie efectuate minim 28 de iteraţii.

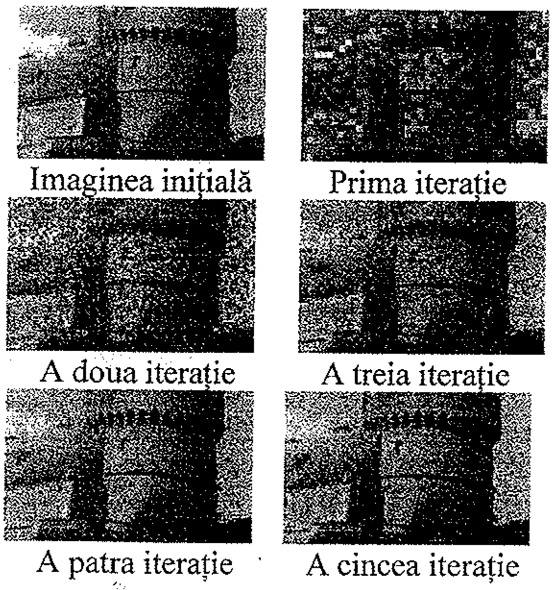

Fig. 4. Decompresia fișierului *castel.tga*

Se observă evoluția ascendentă de la o etapă la alta. Numărul iterațiilor poate crește, iar prin încercări repetate este posibilă identificarea unui număr pentru care calitatea decompresiei este corespunzătoare. Încercările noastre conduc la un număr de 16 iterații, ca nivel performant.

Bibliografie

[Be90] Bell T.C., Cleary J.G., Witten I.N. - Text Compression, Prentice Hall Englewood Cliffs, N.J. 1990

[Dc95] *** Data Compression Conference, Snawbird, UT, 28-30 martie 1995, ISBN 0-8186-7012-6, Editura IEEE Compu Press

[Ia95] I. Iacob - Compresia imaginilor folosind teoria fractalilor, PC Report, nr.34, Iulie 1995

[Iv95] I.Ivan, D. Verniș - Analiza comparată a algoritmilor de compresie date, PC World, nr.12, Decembrie 1995

[Iv95] I.Ivan, D. Verniș - Comprimarea datelor, PC Report, nr. 9, Septembrie 1996

[Iv96] I.Ivan, D. Verniș - Evaluarea seturilor de date destinate compresării, Revista de statistica, nr.1, Ianuarie 1996

[Ze97] E. Zerfus - Fractalii și seriile de timp, PC Report, nr.1, Ianuarie 1997