Yaari Approach of Risk Aversion – Application in Insurance

Prof.dr. Dumitru MARIN, asist. Anamaria ALDEA
Catedra de Cibernetică Economică, ASE Bucureşti

The paper presents a short introduction of the risk and uncertainty concepts, from the beginning till the newest approach of the risk aversion - the Yaari approach. We shall present this approach using an application in insurance
***Key words:** risk, uncertainty, risk aversion, Yaari approach.*

Conceptele de risc şi incertitudine au o istorie destul de scurtă în teoria economică. Pentru prima dată, aceşti termeni au fost folosiţi formal în teoria economică de către **John von Neumann** şi **Oskar Morgenstern** în 1944, atunci când şi-au publicat lucrarea "*Theory of Games and Economic Behavior*". Dar, înaintea lor, **Frank H. Knight** a fost cel care a intuit importanţa pe care riscul şi incertitudinea ar putea-o avea în analiza economică, în lucrarea "*Risk, Uncertainty and Profit*" din 1921. Interesant este însă şi că noţiunea de utilitate marginală, în contextul alegerii în condiţii de risc a fost introdusă chiar din 1738, de către **Daniel Bernoulli**. Ea a constituit de fapt, punctul de plecare al Teoriei Economice Neoclasice.

În perioada următoare celui de-al doilea război mondial, conceptul de "aversiune la risc" a fost analizat de Milton Friedman şi Leonard Savage (1949), ca şi de Harry Markowitz (1952). Măsurarea aversiunii faţă de risc a fost dezvoltată de către John Pratt (1964) şi Kenneth Arrow (1965) şi apoi îmbunătăţită de către Stephen Ross (1981). Mai apoi, Menachem **Yaari** (1968) şi Richard Kihlstrom şi L. Mirman (1974) au urmărit definirea aversiunii la risc în contexte multiple. Rothchild şi Joseph Stiglitz (1970, 1971), Peter Diamond şi Joseph Stiglitz (1974) au cercetat modalităţi de măsurare a "înclinaţiei la risc".

În 1921, **Frank H. Knight** a fost primul care a făcut distincţia dintre „risc" şi „incertitudine". El consideră *riscul* referindu-se la situaţiile în care decidentul poate să atribuie probabilităţi, evenimentelor aleatoare cu care se confruntă. La polul opus se află *incertitudinea*, proces ce se referă la acele situaţii în care evenimentelor nu li se pot asocia probabilităţi specifice, neexistând nici o bază ştiinţifică pe care acestea să poată fi calculate (Keynes).

În 1951, **Kenneth Arrow** a observat că cel mai greu lucru de precizat era modul în care riscul şi incertitudinea afectau deciziile economice. Se punea astfel întrebarea legăturii dintre creşterea sau descreşterea gradului de incertitudine şi modificarea comportamentului decidentului. Sau se dorea să se ştie în ce fel evaluează decidenţii situaţiile riscante ale căror câştiguri sunt aleatoare. Răspunsurile la astfel de întrebări aveau însă nevoie de definirea unor noi concepte, mai ales al celui de alegere în situaţii riscante sau în mediu incert. Încă din 1931, Hicks sau Marschak în 1938 au considerat că preferinţele ar trebui formulate asupra distribuţiilor dar nu se ştia în ce mod atitudinea faţă de risc sau incertitudine pot fi separate de preferinţele pure asupra rezultatelor. La început, s-au propus alternative de genul ordonării aleatoare a speculaţiilor în funcţie de medie sau dispersie.

Kenneth J. Arrow, în 1953, a abordat incertitudinea din punctul de vedere al "stărilor preferate ale naturii", urmat fiind de Gerard Debreu în 1959. Această abordare a fost apoi făcută cunoscută de către Hirshleifer (1959, 1966) când a fost folosită în teoria investiţiilor. **Radner** a dezvoltat-o apoi în finanţe şi în Teoria Echilibrului General.

Abordarea reduce alegerile făcute în condiţii de incertitudine la o problemă obişnuită de alegere a pachetului optim de consum. Ea este astfel diferită de abordarea microeconomică a alegerii în condiţii de incertitudine, ca cea von Neumann – Morgestern deoarece nu se stabilesc preferințe asupra loteriilor în mod direct, ci asupra pachetelor de bunuri din stări aleatoare ale naturii. Având în vedere că se bazează pe stări ale naturii şi alegeri ale acțiunilor de urmat, abordarea se apropie mai mult de teoria lui **Savage** (1954) dar este diferită de aceasta pentru că nu se bazează pe probabilități subiective deşi acest lucru poate fi făcut.

Abordarea incertitudinii bazată pe "stările naturii" constă în faptul că bunurile pot fi diferențiate nu doar prin proprietățile lor fizice sau locul lor în spațiu şi timp ci şi prin locul lor în starea naturii. Fie S – mulțimea "stărilor naturii" exclusive atfel încât să putem nota fiecare bun în funcție de starea naturii în care acesta se primeşte, ceea ce conduce la o mulțime de piețe cu "stări ale naturii aleatoare". În acest context, se va studia o abordare modernă a *atitudinii față de risc*: **abordarea Yarri.**

Teoria aversiunii la risc folosind abordarea cu stări ale naturii preferate a fost pentru prima dată formulată de către **Menachem Yaari** (1969). Pentru a înțelege despre ce este vorba se va studia cazul a doi agenți, fiecare cu propria curbă de indiferență, dintre care una este mai "convexă" decât cealaltă. Se pune problema dacă acest lucru ar însemna că primul agent are sau nu o aversiune la risc mai mare decât cel de-al doilea. Pentru aceasta, se vor aborda două direcții. Prima va folosi ***noțiunea de primă de risc***, la fel ca în accepțiunea Arrow-Pratt, în timp ce cea de-a doua va folosi ***o nouă definiție a aversiunii la risc***.

O aplicație a abordării cu "stări preferate" este legată de asigurări pentru că un contract de asigurare este unul clar de tipul "stări aleatoare" deoarece dacă un accident are loc se plăteşte o indemnizație. Abordarea "stării preferate" în cazul determinării asigurării optime a fost dezvoltată de către Kenneth Arrow, Robert Eisner şi R.H. Strotz. Problema poate apoi să fie abordată şi în cazul informației asimetrice.

Cea mai simplă problemă aleasă este cea în care există două stări ale naturii şi în care se consideră o primă fixă pe unitatea monetară asigurată în valoare de γ. Se consideră mulțimea stărilor naturii $S=\{A,N\}$, unde A este starea în care are loc accidentul şi *N*, cea în care acesta nu are loc. Fie $w=\{w_A, w_N\}$ *averea* asiguratului în ambele stări ale naturii, unde w_A este averea de care acesta dispune în caz de accident iar w_N este averea în cazul în care accidentul nu are loc. Evident, $w_A < w_N$, astfel încât pierderea înregistrată în caz de accident va fi $w_A - w_N > 0$. Atunci, averea de care acesta dispune, *w*, se află pe prima bisectoare, în graficul dependenței stărilor (Figura 1).

Fiecare stare a naturii are loc cu o probabilitate subiectivă şi notăm cu π_s *probabilitatea* ca accidentul să aibă loc, ceea ce înseamnă că 1-π_s este probabilitatea ca accidentul să nu aibă loc. Astfel, averea asiguratului va fi o variabilă aleatoare de forma:

$w:\begin{pmatrix} w_A & w_N \\ \pi_s & 1-\pi_s \end{pmatrix}$. *Funcția de utilitate* a asiguratului, independentă de starea naturii are forma:

$$U(w)=\pi_s U(w_A)+(1-\pi_s)U(w_N)$$

şi se calculează ca fiind utilitatea aşteptată de asigurat în punctul dat de averea sa inițială.

Un *contract de asigurare* poate fi descris ca fiind $c=(\beta,\alpha)$, unde α este *prima de asigurare* plătită în cazul în care accidentul nu are loc iar β este *despăgubirea netă* în caz de accident (diferența între valoarea despăgubirii şi prima plătită). Dacă un agent achiziționează un contract de asigurare de forma $c=(\beta,\alpha)$, atunci funcția sa de utilitate devine:

$$U(w,c)=\pi_s U(w_A+\beta)+(1-\pi_s)U(w_N-\alpha)$$

Dar, α şi β nu sunt constante ci variabile care depind de C, *suma* aleasă de agent pentru a fi *asigurată*. Putem, în continuare, să luăm prima totală plătită ca fiind proporțională cu suma asigurată, astfel încât $\alpha=\gamma C$, unde $\gamma\in[0,1]$, care este prima pe unitatea monetară asigurată. În această situație, putem calcula despăgubirea netă ca fiind $\beta=C-\gamma C$, adică suma asigurată din care se scade prima plătită.

Se observă astfel că *profitul aşteptat* de societatea de asigurări este $(1-\pi_s)\alpha - \pi_s\beta$. Dacă nu se obține profit, atunci: $(1-\pi_s)\alpha - \pi_s\beta = 0$

$\Rightarrow \frac{\pi_s}{1-\pi_s} = \frac{\alpha}{\beta}$, astfel încât raportul dintre prima plătită şi despăgubirea netă este egală cu raportul probabilităților subiective. Înlocuind $\beta = (1-\gamma)C$ şi $\alpha = \gamma C$, atunci obținem: $\frac{\pi_s}{1-\pi_s} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$, de unde rezultă că $\pi_s = \gamma$, sau că prima pe unitatea monetară asigurată este egală cu probabilitatea subiectivă ca accidentul să se producă.

În aceste condiții, dreapta asigurării cu şanse egale ("fair insurance"), notată cu F, ce trece prin w în Figura 1 va reprezenta acele contracte de asigurare în care $\frac{\pi_s}{1-\pi_s} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ pentru diferite sume asigurate, şi se va comporta ca restricție bugetară a agentului economic.

Funcția obiectiv a agentului constă în aflarea sumei optime asigurate, C, pentru o primă pe unitatea monetară asigurată γ dată.

Problema de optim a acestuia va fi:

$$\max_C U(w,c) = \max_C \left[\pi_s U(w_A + C - \gamma C) + (1-\pi_s)U(w_N - \gamma C)\right]$$

Se va obține condiția de ordinul 1:

$$\frac{\partial U(w,c)}{\partial C} = \pi_s U'(w_A + C - \gamma C)(1-\gamma) + (1-\pi_s)U'(w_N - \gamma C)(-\gamma) = 0$$

Rearanjând obținem

$$\frac{U'(w_N - \gamma C)}{U'(w_A + C - \gamma C)} = \frac{\pi_s}{(1-\pi_s)} \times \frac{(1-\gamma)}{\gamma}.$$

Dacă asigurarea este una cu "şanse egale", adică dacă $\pi_s = \gamma$, atunci aceasta se reduce la: $\frac{U'(w_N - \gamma C)}{U'(w_A + C - \gamma C)} = 1$, astfel încât utilitatea marginală a stării în cazul în care are loc accidentul este egală cu utilitatea marginală a stării în cazul în care nu are loc accidentul. De aici, folosindu-ne de proprietatea de independență a utilității față de stările naturii, reiese că $w_A + C - \gamma C = w_N - \gamma C$. Rezultă că $C = w_N - w_A$, adică agentul alege asigurarea *totală*, astfel încât să recuperează toată pierderea produsă în caz de accident. În Figura 1, *asigurarea optimă* este dată de punctul $c = (w_N - \alpha, w_A + \beta)$, în care cea mai mare curbă de indiferență este tangentă la dreapta asigurării cu şanse egale F, chiar pe prima bisectoare.

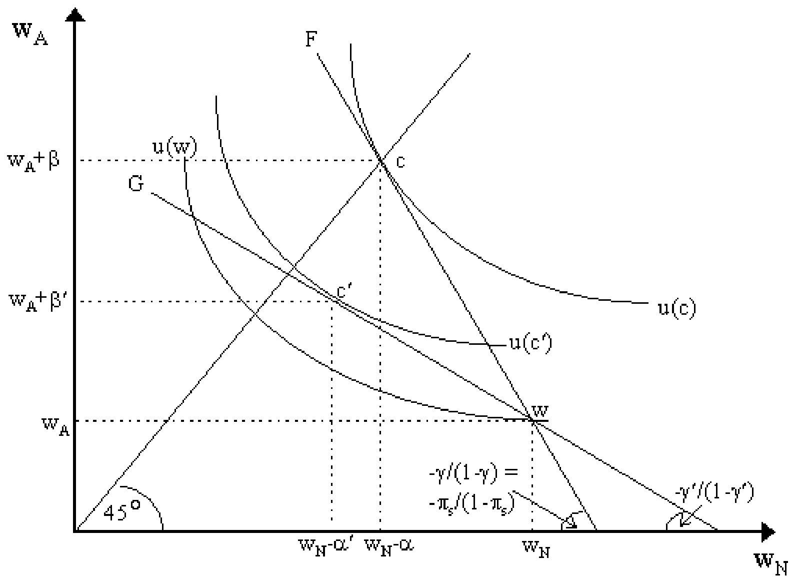

Fig. 1. Asigurarea Optimă (http://homepage.newschool.edu/het/)

Suma asigurată complet rezultată depinde de presupunerea că asigurarea este una cu „şanse egale", sau că $\pi_s = \gamma$. Se va presupune că firma de asigurare vrea să realizeze profit, adică $(1-\pi_s)\alpha - \pi_s\beta > 0$. De aici rezultă că $\frac{\gamma}{1-\gamma} > \frac{\pi_s}{1-\pi_s}$, sau $\gamma > \pi_s$ astfel încât prima pe unitatea monetară asigurată este mai mare decât probabilitatea de accident. Din punctul de vedere al agentului, aceasta este o asigurare cu "şanse inegale" (unfair insurance) reprezentată de dreapta G din Figura 1, şi care are panta $\frac{\gamma'}{1-\gamma'}$. În acest caz, din condiţia de ordinul 1 a consumatorului se obţine: $\frac{U'(w_N-\gamma C)}{U'(w_A+C-\gamma C)}=\frac{\pi_s}{1-\pi_s}\times\frac{1-\gamma}{\gamma}<0$ astfel încât utilitatea marginală în cazul în care nu are loc accidentul este mai mică decât cea în cazul în care acesta are loc. Din quasi-concavitatea funcţiei de utilitate, rezultă că utilitatea agentului în cazul în care nu are loc accidentul este mai mare decât utilitatea acestuia în cazul în care are loc accidentul. Deci, agentul nu poate să se asigure complet. Punctul de optim al individului în cazul asigurării cu „şanse inegale" este dat de c', şi este punctul de tangenţă dintre dreapta G şi cea mai mare curbă de indiferenţă $U(c')$. Se observă că asigurarea nu este completă din moment ce punctul se află sub prima bisectoare, astfel încât $w_A+\beta'<w_N-\alpha'$, adică paguba nu este în întregime acoperită.

În continuare, se pune problema dacă în cazul unei asigurări **incomplete**, agenţii cu aversiune la risc îşi asigură o sumă mai mare decât cei cu o aversiune mai mică faţă de risc.

Fie doi agenţi *u* şi *v*, unde agentul *u* este cu aversiune mai mare faţă de risc decât agentul *v*, dar amândoi au aceleaşi probabilităţi subiective de accident şi aceeaşi pierdere. În Figura 2, aversiunea mai mare la risc a agentului *u* se observă din faptul că acesta are o curbă de indiferenţă mai convexă decât cea a lui *v*. Dacă asigurarea este cu „şanse egale" (fair insurance), astfel încât $\pi_s=\gamma$, atunci pe dreapta F se observă că ambii agenţi se asigură complet în punctul *c*, în care $U(c)$ şi $V(c)$.

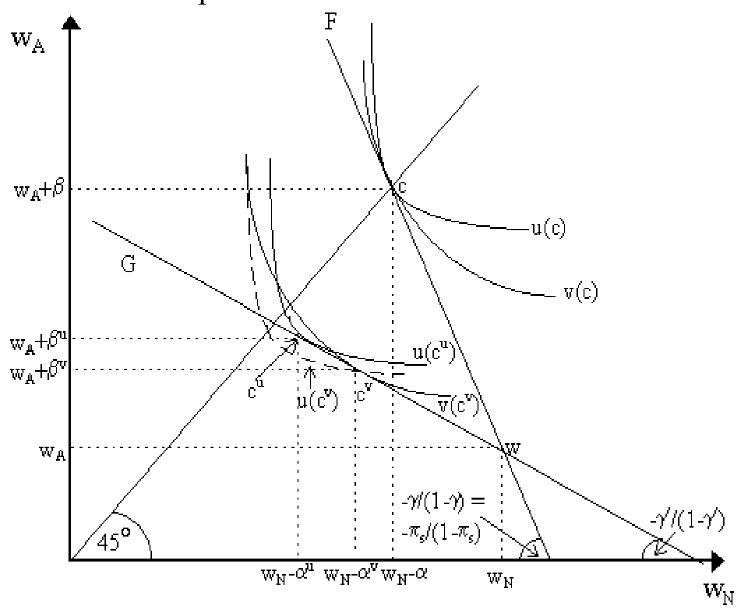

Figura 2 – Asigurare pentru diferite tipuri de agenţi cu aversiune la risc (http://homepage.newschool.edu/het/)

Dacă, totuşi, există o asigurare cu "şanse inegale" atunci, aceasta este reprezentată de dreapta G şi ştim că nici un agent nu se va asigura complet. În Figura 2, se poate observa că agentul *u* are un contract optim în punctul c^u iar agentul *v* are un contract optim în punctul c^v, obţinând astfel utilităţile $U(c^u)$ şi $U(c^v)$. Se observă că $w_N-\alpha^v>w_N-\alpha^u$, de unde rezultă că suma asigurată de către agentul *u* este mai mare decât suma asigurată de agentul *v*, adică agentul cu aversiune mai mare la risc asigură mai mult.

Acest rezultat este confirmat de Teorema Arrow-Pratt. Conform acesteia, dacă *u* este cu aversiune mai mare la risc decât *v*, atunci

$u = T(v)$, unde T este o funcţie concavă. Atunci, la punctul de optim al lui *v*, ştim că panta negativă a curbei de indiferenţă a lui *v* este egală cu raportul primelor: $-\left.\frac{dw_A}{dw_N}\right|_v = \frac{(1-\pi_s)v'(w_N - \gamma C^v)}{\pi_s v'(w_A + (1-\gamma)C^v)} = \frac{1-\gamma'}{\gamma'}$ unde C^v este asigurarea optimă a agentului *v*. În cele ce urmează vom obliga agentul *u* să aibă aceeaşi asigurare ca şi agentul *v*. În acest caz, panta curbei de indiferenţă a agentului *u* în punctul c^v este: $-\left.\frac{dw_A}{dw_N}\right|_u = \frac{(1-\pi_s)u'(w_N - \gamma C^u)}{\pi_s u'(w_A + (1-\gamma)C^u)}$, sau deoarece $u = T(v)$, atunci vom avea $u' = T'(v) \times v'$:

$$-\left.\frac{dw_A}{dw_N}\right|_u = \frac{(1-\pi_s)T'(v(w_N - \gamma C^v))v'(w_N - \gamma C^v)}{\pi_s T'(v(w_A + (1-\gamma)C^v))v'(w_A + (1-\gamma)C^v)}$$

sau, înlocuind în:

$$-\left.\frac{dw_A}{dw_N}\right|_u = \frac{T'(v(w_N - \gamma C^v))}{T'(v(w_A + (1-\gamma)C^v))} \times \left[-\left.\frac{dw_A}{dw_N}\right|_v\right],$$

astfel încât panta curbei de indiferenţă a lui *u* în punctul c^v este o funcţie de panta curbei de indiferenţă a lui *v* tot în punctul c^v. Cea mai importantă componentă este raportul care le leagă. Este uşor de observat că, deoarece $v(w_N - \gamma C^V) > v(w_A + (1-\gamma)C^V)$ în punctul c^v (deoarece c^v se află sub prima bisectoare) atunci, din concavitatea funcţiei T, vom şti că $T'(v(w_N - \gamma C^V)) < T'(v(w_A + (1-\gamma)C^V))$. În consecinţă, raportul $\frac{T'(v(w_N - \gamma C^V))}{T'(v(w_A + (1-\gamma)C^V))} < 1$. Atunci, din formula de mai sus, în punctul c^v, vom avea $-\left.\frac{dw_A}{dw_N}\right|_u < -\left.\frac{dw_A}{dw_N}\right|_v$ rata marginală de substituţie a agentului *u* în c^v este mai mică decât rata marginală de substituţie a agentului *v* în c^v; curba de indiferenţă a agentului *u* este mai plată decât cea a agentului *v*. În Figura 2, acest lucru se poate observa comparând curba de indiferenţă $U(c^v)$ (dreapta punctată) cu curba de indiferenţă $V(c^v)$. În consecinţă, contractul optim al agentului *u* trebuie să se afle mai sus de curba G, aproape de prima bisectoare, cum se poate observa în punctul c^u. Astfel, $\alpha^u > \alpha^v$, de unde rezultă că $C^u > C^v$, adică agentul cu aversiune mai mare la risc va asigura o sumă mai mare decât cea a celui cu o aversiune mai mică, aşa cum s-a observat anterior.

$$-\left.\frac{dw_A}{dw_B}\right|_v = \frac{(1-\pi_s)v'(w_N - \gamma C^v)}{\pi_s v'(w_A + (1-\gamma)C^v)} = \frac{1-\gamma'}{\gamma'}$$

$$-\left.\frac{dw_A}{dw_B}\right|_u = \frac{(1-\pi_s)u'(w_N - \gamma C^v)}{\pi_s u'(w_A + (1-\gamma)C^v)}$$

Acesta a fost un exemplu al aplicării abordării Yaari a aversiunii la risc. În acest context, studiul aversiunii la risc nu s-a încheiat. Recente în acest domeniu sunt cercetările lui Peter Fishburn (1970,1982,1988,1994), Edi Karni şi David Schmiedler (1991), Jack Hirshleifer şi John Riely (1979,1992), Jean-Jacques Laffont (1989) şi Mark Machina (1987).

Bibliografie

[1] K.J. Arrow (1963) "*Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care*", American Economic Review, Vol. 53, p.941-73.

[2] K.J. Arrow (1965) "*Aspects of the Theory of Risk-Bearing"*, Helsinki: Yrjö Hahnsson Foundation.

[3] K. Borch (1968) "*The Economics of Uncertainty"*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

[4] G. Debreu (1959) "*Theory of Value: An axiomatic analysis of economic equilibrium"*, New Haven: Yale University Press.

[5] R. Eisner, R.H. Strotz (1961) "*Flight Insurance and the Theory of Choice*", Journal of Political Economy, Vol. 69, p.355-68.

[6] J. Hirschleifer (1965) "*Investment Decision under Uncertainty: Choice-theoretic approaches*", Quarterly Journal of Economics, Vol. 79, p.509-36.

[7] J. Hirshleifer (1966) "*Investment Decision under Uncertainty: Applications of the state-preference approach*", Quarterly Journal of Economics, Vol. 80, p.252-77.

[8] M.J. Machina and W.S. Neilson (1987) "The Ross Characterization of Risk Aversion: Strengthening and extension", Econometrica, Vol. 55 (5), p.1139-50.

[9] L.J. Savage (1954) "The Foundations of Statistics*"*, 1972 edition, New York: Dover

[10] M. Rothschild and J.E. Stiglitz (1970) "Increasing Risk I: a definition", Journal of Economic Theory, Vol. 2 (3), p.225-43.

[11] M. Rothschild and J.E. Stiglitz (1971) "Increasing Risk II: its economic consequences", Journal of Economic Theory, Vol. 3 (1), p.66-84.

[12] S.A. Ross (1981) "Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and in the Large with Applications", Econometrica, Vol. 49 (3), p.621-39.

[13] M. Yaari (1969) "*Some Measures of Risk Aversion and Their Uses*", Journal of Economic Theory, Vol. 1 (2), p.315

[14] http://homepage.newschool.edu/het/