On the Handling of Uncertainty

Nicolae MĂRGINEAN
Facultatea de Ştiinţe Economice, Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca

The principal aim of this article is to present shortly the main existent approaches of uncertainty used generally in computer systems, especially in expert systems. The natures of uncertainty determine what theory is useful in every case. I remind here about the probability theory in case of objective uncertainty, possibility theory and evidence theory in case of subjective uncertainty and fuzzy theory in case of vagueness of linguistic terms. Also, in many points of article I emphasize the main difference between presented theories.
***Keywords**: fuzzy set, evidence, possibility, probability, necessity, plausibility, consistence, belief.*

Introducere

De-a lungul timpului s-a observat că realitatea şi în general cunoaşterea umană este incertă, şi aceasta din cauza unei game variate de surse de incertitudine: ambiguitate, incompletitudine, incorectitudine, imprecizie, comportamente aleatoare etc. Soluţionarea unor probleme învăluite de incertitudine impune folosirea cunoştinţelor incerte, emularea gândirii umane prin intermediul unui sistem informatic impune dezvoltarea unor metode inferenţiale incerte şi inexacte .

Incertitudinea poate prezenta mai multe faţete. Ne putem confrunta cu aşa numita incertitudine aleatoare ce rezultă din faptul că un sistem poate avea un comportament aleator. O mai întâlnim şi sub denumirea de incertitudine stochastică sau incertitudine obiectivă. De asemenea reîntâlnim în viaţa reală şi aşa numita incertitudine epistemică sau subiectivă, datorată lipsei de informaţii despre un sistem de evenimente. În plus, chiar dacă nu ne confruntăm cu o lipsă de informaţie, o situaţie de incertitudine poate apărea datorită semanticii vagi sau ambigui a unor concepte.

2. Metodologie

2.1 Incertitudinea stochastică

Incertitudinea stochastică poate fi modelată foarte uşor cu ajutorul teoriei probabilităţilor bayesiene, teorie aplicabilă în acele situaţii în care evenimentele sunt bine precizate dar apariţia lor este incertă din cauza lipsei de informaţie. Interesul privind calculul probabilităţilor în sistemele expert a crescut mult după succesul remarcabil obţinut în sistemul MYCIN.

Probabilitatea unui eveniment este un număr bine determinat, ce caracterizează şansa de realizare a unui eveniment. Câteva proprietăţi ar fi următoarele:

P(0)=0;

0<=P(A)<=1

∑P(Ai)=1 unde A1…An un sistem complet de evenimente

P(¬A)=1-P(A)

P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B) (formula lui Poincare)

P(B/A)=P(A∩B)/P(A) unde P(B/A) este probabilitatea condiţionată a lui B faţă de A. Dacă evenimentele sunt independente atunci P(A∩B)=P(A)*P(B)

Inegalitatea lui Boole

P(A1∩A2…An)>=P(A1)+P(A2)…+P(An)-(n-1)

Formula probabilităţii totale

Dacă A1,A2…An este un sistem complet de evenimente şi X un eveniment oarecare atunci

P(X)=P(A1)*P(X/A1)+…+P(An)*P(X/An)

Formula lui Bayes

Dacă A1,A2…An este un sistem complet de evenimente şi X unul dintre acestea atunci

P(Aj/X)=(P(A)*P(X/Aj))/P(X).

Într-o regulă de producţie IF A THEN B, fiind cunoscută probabilitatea P(A), cu ajutorul regulii bayesiene putem identifica probabilitatea concluziei, data de valoarea lui P(B/A).

2.2 Incertitudinea epistemică

În cazul incertitudinii subiective, probabilitățile nu mai pot fi aplicate din cauza lipsei de informații. Prin urmare, s-a încercat dezvoltarea altor teorii care să modeleze incertitudinea epistemică. Printre acestea se numără şi teoria posibilității şi teoria evidenței.

O prima abordare a incertitudinii epistemice o reprezintă teoria posibilității, prezentată pentru prima dată de Lotfi Zadef, părintele mulțimilor fuzzy. Unul dintre conceptele principale ale teoriei posibilității este distribuția acesteia. Punctul de plecare l-a reprezentat noțiunea de restricție fuzzy. Pentru a înțelege ce este aceasta, să ne imaginăm un geamantan cu pereți elastici şi unul inelastic. Pentru cel cu pereți tari, volumul acestuia este o valoare unică, bine stabilită. Pentru cel cu pereți elastici, volumul depinde de gradul de înghesuire al obiectelor în acesta. Acest grad de înghesuire poate fi foarte bine reprezentat de o funcție similară funcției de apartenență a unei mulțimi fuzzy. Astfel distribuția posibilității (Dpos) va fi numeric egală cu funcția de apartenență a unei mulțimi fuzzy (restricție fuzzy), având însă o interpretare diferită.

Dpos: L->[0,1]

Daca Dpos(x)=0 x este imposibil

Daca Dpos(x)=1 x este cu certitudine posibil

Să luăm următorul exemplu. “Ion este tânăr”. În teoria mulțimilor fuzzy, gradul de apartenență este interpretat ca un grad de compatibilitate a vârstei lui Ion cu conceptul tânăr. În teoria posibilității, gradul de apartenență devine gradul posibilității ca Ion să fie tânăr.

Pentru a ilustra diferența dintre distribuția posibilității şi distribuția probabilității, Zadeh ne oferă un exemplu foarte concludent. “Hans mănâncă x ouă la micul dejun. Distribuția posibilității poate fi interpretată ca o măsură a uşurinței cu care Hans mănâncă x ouă, în timp ce distribuția probabilității se obține în urma observării lui Hans la micul dejun, într-o anumită perioadă de timp, în scopul surprinderii frecvenței cu care Hans mănâncă x ouă.

Datorită faptului că distribuția posibilității nu ne oferă o situație completă a incertitudinii, s-a încercat introducerea unor măsuri mai sintetice. Astfel, măsura posibilității este cea care măsoară gradul de consistență sau de plauzibilitate a unui set de evenimente şi este dat de P:X->[0,1] unde P=max(Dpos(x)). Aceasta prezintă mai multe proprietăți:

P(0)=0; P(1)=1;

P(AUB)=max(P(A),P(A),

P(A∩B)<min(P(A),P(B)).

Măsura duală a măsurii posibilității este măsura necesității care măsoară gradul de certitudine sau de siguranță a unui anumit set de evenimente. Ea este dată de funcția N:X->[0,1] unde N(A)=1-P(¬A).

Alte proprietăți ale acesteia:

N(A∩B)=min(N(A),N(B))

N(AUB)>max(N(A),N(B))

Min(N(A),N(¬A))=0

P(A)>N(A)

Dacă N(A)>0, ➔ P(A)=1

P(A)<1, ➔ N(A)=0

Măsura de necesitate şi măsura de posibilitate se comportă ca limite ale unui interval în care ar fi conținută probabilitatea lui A. De aceea se mai spune că noțiunea de posibilitate este o generalizare a noțiunii de probabilitate. Există chiar şi metode prin care se poate face trecerea de la posibilități spre probabilități şi invers. De exemplu, pentru trecerea de la posibilități la probabilități se poate aplica “Principiul raționării incomplete” a lui Laplace.

Incertitudinea, în teoria posibilității, poate fi reprezentată şi cu ajutorul unui indicator ce ia valori în intervalul [0, 1]. Astfel, fiecare cunoştință incertă este reprezentată sub forma unui tuplu (p,a), unde p este acea cunoştință iar a este un indicator ce poate avea mai multe interpretări. Fie reprezintă limita minimă a gradului de certitudine a acelei cunoştințe N(p)>a, fie este doar un indicator de prioritate al acelei cunoştințe, util în operații de ordonare.

O modalitate de raționament în teoria posibilității ar fi adaptarea lui “modus ponens”. Astfel, o generalizare posibilă a lui modus ponens, care ne oferă posibilitatea şi necesitatea lui B, cunoscându-le pe cele a lui A şi A->B, poate fi următoarea:

Dacă P(A->B)>=a

N(A->B)>=b

P(A)>=c
N(A)>=d
Atunci P(B)>=max(a*v(a+d),c*v(b+c))
N(B)>=min(d,b)
Unde v(x)=1 dacă x>1
0 dacă x<=1

O altă abordare a incertitudinii epistemice este cea reîntâlnită în teoria evidenţei lui Dempster şi Shafer. Această teorie este o extindere a teoriei probabilităţii, în care probabilitatea nu mai este asociată doar unui singur eveniment, ci unui set de evenimente. Cu alte cuvinte, analizăm un eveniment prin intermediul subevenimentelor componente. De asemenea, după cum am mai amintit, incertitudinea este caracterizată de un interval de valori şi nu doar de o anumită valoare.

Există trei funcţii importante în teoria evidenţei: funcţia probabilităţii de bază (bpa), funcţia de încredere (bel) şi funcţia de plauzibilitate(pl).

Funcţia probabilităţii de bază nu se referă la o probabilitate în sensul clasic. Ea este o funcţie definită pe mulţimea părţilor unei mulţimi cu valori în intervalul [0,1]

m:P(X)->[0,1]
m(0)=0
∑m(A)=1 unde AεP(X)

ce caracterizează evidenţa cu care putem afirma că un element din X face parte dintr-o anumită submulţime A.

Pornind de la bpa, putem determina cele două limite care caracterizează incertitudinea unei cunoştinţe.

Limita inferioară este dată de funcţia de încredere. Aceasta reprezintă suma evidenţelor tuturor submulţimilor unei mulţimi.

$$Bel(A) = \sum_{B|B \subseteq A} m(B)$$

Limita superioară a acestui interval este dată de funcţia de plauzibilitate, având ca formulă de calcul

$$Pl(A) = \sum_{B|B \cap A \neq 0} m(B)$$

În plus, cele două măsuri pot deriva una din cealaltă.

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A)$$

unde ⌐A este complementul clasic al unei mulţimi A.

$$Bel(\neg A) = \sum_{B|B \cap A = 0} m(B)$$

Şi-n acest caz, cele două limite, Bel şi Pl pot reprezenta limitele inferioară, respectiv superioară a probabilităţilor clasice.

În ceea ce priveşte inferenţa, în teoria evidenţei se aplică regula combinaţională a lui Dempster. Originea acestei reguli o reprezintă formula lui Bayes. Măsurile rezultatelor inferenţiale, încrederea şi plauzibilitatea vor fi calculate pe baza probabilităţilor primare.

Probabilitatea primară asignată unei combinaţii a două seturi de evenimente independente B şi C este dată de formula

$$m_{1,2}(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C)}{1 - K},$$

unde $K = \sum_{B \cap C = 0} m_1(B) m_2(C)$, K este un factor de normalizare care are rolul evitării conflictelor dintre evidenţe.

Exemplu:
m1({D})=0.8,m1({D'})=0,m1({D,D'})=0.2
m2({D})=0.9,m2({D'})=0,m2({D,D'})=0.1

	M2	{D}	{D'}	{D,D'}
m1		0.9	0	0.1
{D}	0.8	0.72	0	0.08
{D'}	0	0	0	0
{D,D'}	0.2	0.18	0	0.2

(2 cazuri X∩Y=0,m1({D})∩m2({D'})
m1({D'})∩m2({D})
K=1-0-0=1
m1○m2({D})=1(0.72+0.08+0.18)=0.98
m1○m2({D'})=1*0=0
m1○m2({D,D'})=1*0.02=0.02

Modelarea incertitudinii unei reguli de producţie IF B THEN A va fi realizată printr-o probabilitate primară condiţionată. Aceasta nu este altceva decât un caz special al aplicării regulii lui Dempster. Astfel probabilitatea primară a lui A va fi calculată cu următoarea formulă: $m_B(A) = \dfrac{\sum_{C \cap B = A} m(C)}{\sum_{C \cap B \neq 0} m(C)}$

sau, cu ajutorul indicatorilor de încredere,

$$Bel_B(A) = \frac{Bel(A \cap \overline{B}) - Bel(\overline{B})}{1 - Bel(\overline{B})}.$$

În cazul în care apar situații caracterizate de un număr mare de informații conflictuale, regula lui Dempster trebuie ajustată, rezultatele nemaifiind elocvente. O serie de cercetători au încercat modificarea regulii combinaționale a lui Dempster, printre care îi amintim pe Yager, Inagaki, Zhang, Dubois, Prade. Pentru exemplificare, vom aminti regula modificată a lui Yager. Acesta face o distincție clară între probabilitatea primară m şi ceea ce el numeşte probabilitatea de fond, notată cu q. Probabilitatea de fond combinată ar fi următoarea

$$q(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C)$$

De remarcat ca dispare factorul de normalizare K. Dacă la Dempster, m(0)=0, la Yager q(0)>=0, unde q(0) are ca formulă de calcul, cea a lui K din regula lui Dempster, fiind denumit gradul de ignoranță. Astfel probabilitatea primară a lui Yager la nivel de subset este numeric egală cu probabilitatea de fond, dar în schimb la nivel de set universal probabilitatea primară se calculează în felul următor: m'(X)=q(X)+q(0). Se observă faptul că normalizarea nu se mai face la nivel de subset, ci doar la nivel de set universal.

Trebuie să reținem că probabilitatea primară a lui Dempster nu este acelaşi lucru cu probabilitatea primară a lui Yager. Dacă la Yager, m(A)=q(A), la Dempster m(A)=q(A)/1-q(0).

2.3 Ambiguitatea termenilor lingvistici

Să prezentăm în cele ce urmează, modalitatea de modelare a incertitudinii determinată de ambiguitatea unor termeni lingvistici.

Logica fuzzy se doreşte a fi o extindere naturală a logicii booleene, în sensul introducerii unei infinități de valori de adevăr între fals şi adevărat, valori de adevăr exprimate cu ajutorul unui număr real din intervalul [0,1]. A fost fundamentată teoretic de către Lotfi Zadeh.

Dacă X este o colecție de obiecte, atunci o mulțime fuzzy este o mulțime de perechi ordonate:

A={(x,μ(x))|x€X}

unde μ:X->[0,1] poartă denumirea de funcție de apartenență a lui x în A . Valoarea 1 semnifică apartenență totală in timp ce valoarea 0 semnifică neapartenența.

Logica fuzzy este o extindere a logicii clasice booleene, aşa încât vom regăsi toate operațiile principale AND, OR, NOT.

$$\mu_{A\ AND\ B} = \max(\mu_A, \mu_B)$$

$$\mu_{A\ OR\ B} = \min(\mu_A, \mu_B)$$

$$\mu_{NOT\ A} = 1 - \mu_A$$

Relațiile fuzzy sunt submulțimi fuzzy de XxY. Dacă X, Y în R, atunci

$\mathrm{Re}l = \{(x,y), \mu_{rel}(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\}$ se numeşte relație fuzzy pe XxY.

Dacă R şi Z sunt două relații având acelaşi univers al discursului, atunci

$$\mu_{R \cup Z}(x,y) = \max(\mu_R(x,y), \mu_Z(x,y))$$

$$\mu_{R \cap Z}(x,y) = \min(\mu_R(x,y), \mu_Z(x,y))$$

Relațiile fuzzy pot fi combinate între ele prin aplicarea regulii compoziționale a mulțimilor fuzzy.

$$R1 \circ R2 = \{(x,z), \max_y(\min(\mu_{R1}(x,y), \mu_{R2}(y,z))) | x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

Dacă R1(x,y), (x,y) în XxY şi R2(y,z),(y,z) în YxZ sunt două relații fuzzy atunci

Unul din instrumentele de bază ale logicii fuzzy şi raționamentului aproximativ îl reprezintă variabila lingvistică.

O variabila lingvistica este un quintuplu (x, T,G,U,M) unde

1. x este numele variabilei lingvistice
2. T este mulțimea valorilor lingvistice ale variabilei lingvistice, T fiind numărabilă
3. G este o gramatică ce generează elementele din T
4. U este universul discursului, adică mulțimea suport a tuturor mulțimilor fuzzy ataşate valorilor lingvistice
5. M este o regulă semantică ce ataşează unei valori lingvistice semnificația sa

Exemplu: variabila lingvistică "vârsta" poate avea mai multe valori lingvistice ca “bătrân”, “tânăr” etc., fiecăreia dintre acestea corespunzându-i o mulţime fuzzy. Ca univers al discursului, in cazul de fata putem lua intervalul [0,100], vârsta unui om încadrându-se de cele mai multe ori în acest interval.

$$M(batran) = \{(x, \mu_{batran}(x)) \mid x \in [0,100]\}$$

Asupra valorilor lingvistice putem aplica aşa numiţii modificatori, care au ca principal rol modificarea gradului de apartenenţă a mulţimilor fuzzy aflate în spatele lor, sau, altfel spus, redesenarea aspectului grafic al funcţiei de apartenenţă aferentă acestora. Cu ajutorul acestora, putem reprezenta expresii de forma “foarte tânăr”, mai mult sau mai puţin bătrân”, “destul de tânăr etc. De exemplu, foarte A=con(A), mai mult sau mai puţin A= dil(A).

Modelele matematice cele mai frecvente folosite pentru modificatori sunt

- concentraţia $\mu_{con(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$
- diluarea $\mu_{dil(A)}(x) = (\mu_A(x))^{1/2}$
- intensificarea contrastelor

$$\mu_{\mathrm{int}(A)}(x) = \begin{cases} 2(\mu_A(x))^2 & for\ \mu_A(x) \in [0,0.5] \\ 1 - 2(1-\mu_A(x))^2 & altfel \end{cases}$$

- accentuatori şi dezaccentuatori

$$\mu_{plusA}(x) = (\mu_A(x))^{1.25}$$

$$\mu_{\min usA}(x) = (\mu_A(x))^{0.75}$$

Regulile de producţie fuzzy nu diferă ca formă de cele clasice “Dacă x este A atunci y este B”. Dar în acest caz, x şi y sunt variabile lingvistice iar A şi B valori lingvistice.

Pentru a putea executa inferenţe putem apela ca şi in cazul logicii clasice la modus ponens, într-o formă adaptată. Pentru aceasta avem nevoie de definiţia operatorului “implică” în termeni fuzzy. În literatura de specialitate regăsim mai multe definiţii, ca de exemplu:

Early Zadeh ----- I(x,y)=max(1-x,min(x,y))

Lukasiewicz ----- I(x,y)=min(1,1-x-y)

Mamdani ----- I(x,y)=min(x,y)

unde x este gradul de apartenenţă al premisei, y gradul de apartenenţă al concluziei iar I gradul de apartenenţă al implicaţiei.

Dacă A, A’,B, B’ mulţimi fuzzy atunci modus ponens generalizat arată astfel:

Premisa: x este A’

Implicatie: Daca x este A atunci y este B

Concluzie: y este B’

Pasii principali ai unei proces inferential ar fi următorii:

- fuzificarea intrărilor, adică transformarea intrărilor în mulţimi fuzzy, dând o anumită formă funcţiei de apartenenţă;
- aplicarea operaţiilor fuzzy cunoscute, de regulă AND, OR, NOT
- aplicarea operatorului de implicaţie, preluând una dintre definiţiile dorite
- agregarea rezultatelor (transformarea funcţiilor de apartenenţă ale tuturor regulilor într-una singură prin operaţii de însumare, maximizare etc.)
- defuzzificarea – transformarea rezultatului obţinut mai sus în numere discrete; consacrate fiind mai multe metode: metoda centroidului, minimul maximelor, maximul maximelor, media ponderata a maximelor, metoda bisectoarei etc.

3. Concluzii

Metodele prezentate mai sus trebuie aplicate cu mult discernământ. În funcţie de incertitudinea cu care ne confruntăm la un moment dat, trebuie să ştim să alegem teoria adecvată. În cazul incertitudinii aleatoare, teoria probabilităţilor este cea mai bună. Probabilităţile trebuie cunoscute “a priori”, putându-se deduce din serii statistice sau date de un expert. Dar, oricât de bun ar fi un expert, este dificil să se ofere probabilităţile apriorice, cu atât mai mult cu cât, în general, după cum o dovedesc experimentele, subiecţii nu raţionează în domeniul incertitudinii cu ajutorul probabilităţilor. În plus, sunt necesare multe serii de observaţii pentru a cunoaşte valoarea probabilităţilor.

În cazul incertitudinii subiective, teoriile evidenţei şi posibilităţii sunt două din variantele adecvate pe care le avem la îndemână. Teoriile evidenţei şi posibilităţii nu mai folosesc doar un simplu indicator pentru cuantificarea incertitudinii, ci se apelează la doi indicatori sub forma unui interval. Ambele teorii recunosc tot două valori de adevăr, respectiv adevărat sau fals, încercând să surprindă tendinţa unor cunoştinţe incerte înspre una dintre valorile booleene. De asemenea, indicatorii nu vor mai fi definiţi pe un singur eveniment ci se vor defini pe seturi de evenimente aşa încât incertitudinea unei eveniment va fi modelată prin intermediul setului de evenimente ce provoacă evenimentul iniţial. În plus, proprietatea de aditivitate nu se mai respectă. Prin aditivitate înţelegem faptul că, fiind cunoscută valoarea unui indicator pentru un anumit eveniment, automat cunoaştem şi valoarea indicatorului pentru nerealizarea evenimentului, (adică "ind+NON(ind)=1"). În cazul de faţă, după cum observăm şi-n graficul de mai jos, ind+NONind<1, intervalul [x,y] reprezentând incertitudinea ce nu poate fi cuantificată.

--0-----ind-------|x --------------|y ---NON ind---------1

În situaţiile de ambiguitate lingvistică, mulţimile fuzzy reprezintă varianta cea mai potrivită. În plus, chiar şi incertitudinea epistemică amintită mai sus poate fi modelată cu ajutorul acestora, însă acceptând ipoteza multitudinii valorilor de adevăr.

Succesul sistemelor informatice ale viitorului va depinde într-o mare măsură de capacitatea acestora de a implementa incertitudinea. Într-o societate în care totul evoluează foarte rapid, schimbarea fiind omniprezentă, în care volumul informaţional creşte exponenţial, în care problematicile de soluţionat devin din ce în ce mai complexe datorită multitudinii de factori si relaţii, manevrarea incertitudinii cu ajutorul calculatorului devine o necesitate stringentă.

Bibliografie

1. Andone Ioan, Tugui Alexandru, "*Dezvoltarea sistemelor inteligente in economie*", Editura Economică, Bucureşti, 2001
2. Benchimol Guy, Levine Pierre, "*Sisteme expert in intreprindere*", Editura Tehnică, Bucureşti, 1993
3. Muresan Anton, "*Matematici pentru economisti*", Universitatea Babes-Bolyai, Cluj-Napoca, 1991
4. Zadeh L., "*A fuzzy set theoretic interpretation of linguistic hedges*", College of engineering, University of California, Berkeley, 1984
5. Zimmermann H, *"Fuzzy set theory and its applications"*, Kluwer Academic Publishers, 1996
6. citeseer.ist.psu.edu
7. doctor-si.ugr.es
8. en.wikipedia.org
9. www.sandia.gov