An AHP implementation using Mathematica®

Corina Nicoleta IRIMIEA, F.G.D.S.B. Bucureşti
Ovidiu VEGHEŞ, Catedra de Matematică, A.S.E. Bucureşti

We underline the basic concepts of a widely used multi criteria decision-making technique - Analytic Hierarchy Process (AHP) due to its ability to deal with complex and unstructured problems and, at the same time, we propose an implementation of AHP using Mathematica®.
Keywords: *multi criteria decision-making, Analytic Hierarchy Process, Mathematica®.*

1 Decizii folosind AHP

Analytic Hierarchy Process (AHP) este o metodă larg utilizată în domeniul deciziilor multicriteriale. Vom trece în revistă, pentru început, într-o sinteză, principalele rezultate obţinute de Saaty (1977, 1980) şi îmbunătăţite ulterior de-a lungul a mai bine de două decenii de dezbateri privind acest subiect.

Presupunem că ne aflăm în faţa unui număr finit de alternative, dintre care trebuie să le alegem pe cele mai performante în conformitate cu un set de criterii. Regula generală de rezolvare a unei probleme complexe prin metoda modelelor ierarhice multiatribut cere descompunerea ei în subprobleme de dimensiuni reduse şi mai puţin complexe. Considerat un sistem suport al deciziilor multicriteriale, AHP se bazează pe structurarea unei probleme complexe sub forma unei ierarhii. Astfel, urmărind ierarhia, criteriile problemei de decizie se desfac în subcriterii, după modelul „tată" - „fiu". Un indicator de performanţă al problemei „tată" se obţine prin colectarea performanţei furnizate de indicatori corespunzători subproblemelor „fiu" şi sinteza ei după o regulă preferenţială a „tatălui". „Fiii" sunt creaţi doar pentru a-şi servi „tatăl", „tată" care îşi deleagă competenţa „fiilor". Performanţa maximă în îndeplinirea scopurilor „tatălui" se obţine crescând performanţa ce guvernează scopurile „fiilor".

Prima ipoteză de lucru considerată pentru construirea algoritmului este structurarea ierarhică a criteriilor folosite în decizie. Alegerea criteriilor se face ţinând cont de alternativele problemei.

A doua ipoteză de lucru este folosirea metodei Saaty în rezolvarea problemei stabilirii ponderilor relative a subcriteriilor. Metoda nu ţine cont de alternativele asupra cărora se aplică criteriile pentru a calcula coeficienţii (ponderile) de importanţă ai criteriilor. În cele mai multe din situaţiile întâlnite în realitate apar atât criterii calitative, cât şi cantitative, acestea din urmă fiind exprimate, de obicei, în unităţi de măsură diferite, deci suntem confruntaţi cu problema neomogenităţii criteriilor.

A treia ipoteză este folosirea aceleiaşi metode Saaty şi în rezolvarea problemelor de stabilire a ponderilor relative ale alternativelor, câte una pentru fiecare criteriu.

Ultima ipoteză de lucru a algoritmului este considerarea ponderilor relative obţinute drept indicatori de performanţă ai alternativelor în conformitate cu criteriul studiat Scorurile finale ale alternativelor se stabilesc prin agregare liniară conform primei ipoteze obţinându-se un sistem de ponderi asociate alternativelor.

Algoritmul dezvoltat de Saaty (1980) a devenit o metodă de reper în domeniul deciziilor multicriteriale, deşi el a fost criticat atât din punct de vedere teoretic, cât şi practic. Ulterior (1994), autorul acceptă modificarea propusă de Belton şi Gear (1983), ca fiecare coloană a matricei deciziilor să fie împărţită cu elementul maxim al acelei coloane (modificarea ipotezei a patra), numind noul algoritm Ideal Mode AHP. Se elimină astfel inconsistenţa ordonării alternativelor atunci când se introduce o nouă alternativă identică cu una existentă.

Metoda lui Saaty furnizează răspunsuri principalelor două probleme cu caracter tehnic: cum se stabilesc ponderile relative ale unei mulţimi de variante şi cum transpunem numeric compararea a două variante atunci

când avem în vedere un criteriu calitativ.
Saaty (1994), încercând să explice modul de soluționare a primei probleme, ne descrie cazul ideal în care avem următorul experiment teoretic: unui evaluator i se cere să aprecieze masa unor bolovani. Evaluatorul ideal cunoaşte valorile exacte, iar judecățile sale se vor face direct în termeni cantitativi. Matricea judecăților va fi matricea rapoartelor maselor: $A=\begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1} & \cdots & \frac{m_1}{m_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{m_n}{m_1} & \cdots & \frac{m_n}{m_n} \end{bmatrix}$, unde am notat cu $m_1,...,m_n$ masele celor n bolovani luați în considerare. Problema $Aw=\lambda w$ de determinare a vectorilor şi valorilor proprii admite $\lambda_{\max}=n$, pentru care $w=[m_1 \ \cdots \ m_n]^t$ este vector propriu, iar celelalte valori proprii nule. Normalizarea principalului vector propriu înseamnă împărțirea la suma componentelor.
Principalele proprietăți ale matricei pozitive de judecăți sunt:

[*reflexivitate*]: $a_{ii}=1,\forall i$; [*reciprocitate*]: $a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}},\forall i,j$; [*consistență*]:

$$a_{ij}=a_{ik}a_{kj},\forall i,j,k.$$

În acest caz, matricea judecăților poate fi construită plecând de la $n-1$ judecăți distincte, netriviale. Observăm că au loc *consistență* $\Rightarrow$ *reciprocitate* $\Rightarrow$ *reflexivitate*.
Părăsind cazul ideal, ne putem rezuma la reciprocitate, caz în care dacă sunt comparate n criterii, sunt necesare $n(n-1)/2$ comparații. Cele mai multe situații practice nu emit judecăți de comparare relativă perfecte generând inconsistență. Inițiatorul metodei cere (1980) ca metoda să nu se aplice decât pentru judecăți bazate pe o bună informare, judecăți ce au matrice slab inconsistente, pentru $(CR)\le 10\%$, unde $(CR)=\frac{(CI)}{(RI)}$ este raportul de consistență. Indicele de consistență este $(CI)=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$, iar indicele aleator (RI) este (Saaty, 1980) dat prin media indicilor (CI) corespunzătoare unei şir de 500 de matrice reciproce generate aleator.

„Cât de adânc a pătruns corupția într-o structură socială?" este un exemplu de criteriu calitativ ce ne familiarizează cu a doua problemă. Abordarea lui Saaty (1977), privitor la modul în care datele calitative pot îmbrăca cămaşa termenilor cantitativi, se bazează pe compararea unei singure perechi de variante la un moment dat.
Dacă informația este calitativă se va face o alegere dintre 9-17 răspunsuri de tipul „A este hotărâtor mai important decât B", „A este mult mai important decât B", „A este la fel de important ca B", „A este mult mai puțin important decât B", ş.a.m.d. Cuantificarea numerică a acestor exprimări lingvistice se face folosind o scală (adică o bijecție cu o mulțime numerică). O evaluare a 78 de scale diferite se află în Triantaphyllou şi alții (1994), toate bazându-se pe anumite studii psihologice. În acest scop, Saaty a propus o scală cu valori impare cuprinse între 1 şi 9 pentru a cuantifica 5 praguri de bază: 1 corespunzând aprecierii „egală importanță a criteriilor", 3 pentru „importanță moderată a unui criteriu față de celălalt", 5 pentru „importanță mare a unui criteriu față de celălalt", 7 pentru „importanță foarte mare a unui criteriu față de celălalt", iar 9 lui „importanță extrem de mare a unui criteriu față de celălalt".
Se consideră că 2, 4, 6, 8 sunt valori intermediare sau „de compromis". Scala se bucură de proprietatea de reciprocitate: dacă α este valoarea când A este comparat cu B atunci $1/\alpha$ este valoarea comparării lui B cu A.
Dacă informația este cantitativă, compararea are ca rezultat raportul valorilor corespunzătoare variantelor şi răspunde la întrebarea „de câte ori este mai mare A față de B?"
În ambele situații comparațiile elementelor luate câte două trebuie făcute pentru a determina importanța relativă a criteriilor în atingerea scopului urmărit.

2. O implementare în Mathematica®

Matricea comparațiilor elementelor luate două câte două este prima structură de date ce trebuie reprezentată. În cazul informației cantitative suntem conduşi la următoarea matrice a judecăților, matrice construită plecând de la vectorul măsurilor elementelor.

```
ComparatiiElemCANT[vect_] :=
        Outer[Divide, vect, vect];
```

Dacă informaţia este cantitativă matricea judecăţilor privind importanţa relativă trebuie precizată explicit. În ambele situaţii testarea reciprocităţii se face prin funcţia:

```
ReciprocQ[m_] := 1/Transpose[m] == m
```

A doua structură ce trebuie reprezentată este ierarhia de criterii. Fiecare nod al arborelui îl vom reprezenta prin eticheta nodului, matricea de judecăţi privind compararea nodurilor „fiu" şi vectorul nodurilor „fiu". Comenzile următoare testează o structură de date dacă este arbore (în condiţiile precizate), construiesc lista nodurilor frunză.

```
arboreQ[{nume_, inform_, {}}] := True
arboreQ[{_, _, {subA__}}] := And @@ arboreQ /@ {subA}
arboreQ[_] := False
frunza[{nume_, inform_, {}}] := {{nume, inform}}
frunza[{_, _, {subA__}}] := Flatten[frunza /@ {subA}, 1]
ListaFrunze[AD_?arboreQ] := frunza[AD]
```

Obţinerea şi manipularea vectorului de ponderi locale sunt operaţiuni specifice celei de a treia structuri de date.

```
NormareSUM[vect_] := vect/Apply[Plus, vect];
NormareMAX[vect_] := vect/Max[vect];
PrincipalSystem[m_] := First[Sort[Transpose[Eigensystem[m]],
                        Abs[First[#1]] > Abs[First[#2]] &]];
ValoarePropriePrincipala[m_] := First[PrincipalSystem[m]];
VectorPropriuPrincipal[m_] := Part[PrincipalSystem[m], 2];
VectorPropriuPrincipalNormatSUM[m_] :=
                        NormareSUM[VectorPropriuPrincipal[m]];
VectorPropriuPrincipalNormatMAX[m_] :=
                        NormareMAX[VectorPropriuPrincipal[m]];
```

Transformarea unui arbore de matrice de judecăţi într-un arbore de ponderi asociate nodurilor criteriu se poate face de exemplu prin comenzile:

```
arboreT[fTr_, most_, {nume_, inf_, {}}] :=
                        {nume,Times[fTr[inf],most],{}}
arboreT[fTr_, most_, {nume_, inf_, {subA__}}] :=
                        Module[{tempinf LSTsubA},
                         tempinf = Times[fTr[inf] most];
                         LSTsubA = arboreT[fTr,#1,#2] & @@@
                         (Transpose[{tempinf,{subA}}]);
                         {nume, Plus @@ Transpose[LSTsubA][[2]], LSTsubA}]
AHPcritW[AD_?arboreQ] :=
                        arboreT[VectorPropriuPrincipalNormatSUM[N[#]]&,1,AD]
```

Obţinerea vectorului de priorităţi se face prin

```
AHPcriterii[AD_?arboreQ] :=
                        Flatten[Transpose[ListaFrunze[AHPcritW[AD]]][[2]]];
```

Performanţele alternativelor se pot obţine prin prelucrarea listei de matrice de comparaţie:

```
AHPalternative[varianta_, listaMcomp_] :=
                        If[varianta == "original", Transpose[
                        Apply[VectorPropriuPrincipalNormatSUM,
                         Partition[listaMcomp, 1], {1}]],
                        If[varianta == "idealmode", Transpose[
                        Apply[VectorPropriuPrincipalNormatMAX,
                         Partition[listaMcomp, 1], {1}]], {{"***err"}}]];
```

Folosirea acestor comenzi o vom ilustra printr-un exemplu.

```
ADcriterii = {ScopGeneral, ComparatiiElemCANT[{8, 2, 3}],
                        {{Criteriul1, {{1}}, {}},
                         {Criteriul2, {{1}}, {}},
                         {Criteriul3, {{1}}, {}}}}
PrioritatiCriterii = AHPcriterii[ADcriterii];
ListaMComparAlternative = {ComparatiiElemCANT[{1, 5, 1}],
                        ComparatiiElemCANT[{9, 2, 5}],
                        ComparatiiElemCANT[{9, 2, 9}]};
PrioritatiAlternativePeCriterii =
                        AHPalternative["original",ListaMComparAlternative];
ScoruriAlternative = N[PrioritatiAlternativePeCriterii.PrioritatiCriterii];
```

În încheiere mai trebuie făcute două precizări. Ordinea şi corelarea simultană a celor două structuri de date de intrare este esențială pentru menținerea semanticii rezultatului. Scopul articolului este unul didactic, implementarea lăsând loc unor posibile îmbunătățiri.

Bibliografie

[1] Andraşiu M., Baciu A., Pascu A., Puşcaş E., Taşnadi A. – Metode de decizii multicriteriale, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1986.

[2] Belton V., Gear T. - On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies, Omega **11**, 1983.

[3] Irimiea C.N., Vegheş O. - A hierarchical method for determining suitable portfolios, The International Conference on Economic Cybernetics, DEC-2002, Bucureşti.

[4] Saaty T.L. - A scaling method for priorities in hierarchical structures, Journal of Math. Psychology, **15**, 1977.

[5] Saaty T.L. - The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill, New York, 1980.

[6] Saaty T.L. - Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the AHP RWS Publications, Pittsburgh, 1994.

[7] Triantaphyllou E., Mann S.H. - Some Critical Issues in Making Decisions With Pairwise Comparisons", Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, **3**, 1994.

[8] Varian Hal R., Computational Economics and Finance, Modeling and Analysis with Mathematica®, Springer, 1996.

[9] Wolfram S., The Mathematica® Book, 4th ed., Wolfram Media - Cambridge University Press, 1999.