Programare procentuala: formulari si proprietati

Lect. Silviu BÂRZA
Facultatea de Matematica-Informatica, Universitatea „Spiru Haret”

This paper wishes to present an alternative approach for some optimization problems for which solving by classic algorithms has paradox behavior in finding optimal solution. To avoid problems which appear in determination of optimal solution, I propose problem transformation to combinatorial optimization for which could be found alternative solving procedure that will follow in future papers.
Keywords*: linear programming, combinatorial optimization, percentage programming, mixture models.*

Participarea la unele studii legate de industria textila a scos în evidenta interventia unor modele matematice liniare de o forma speciala pe care dorim sa o tratam în continuare. Aceste modele surprind caracteristici tehnologice rezultate în urma realizarii unor amestecuri si ar putea fi numite într-o prima faza *modele de optimizare a amestecurilor*.
Pe de lata parte, credem ca astfel de modele pot fi la fel de bine utilizate si în cazul partajarii unor resurse pe baze procentuale asa cum este cazul în zona economicului la realizarea bugetelor pentru diferite niveluri de lucru de la micro la macro economic. Propunerea de utilizare a modelelor cu forma pe care o vom propune pentru cea de-a doua utilizare ne conduce la utilizarea numelui de *modele procentuale.*

Forma generala a modelelor procentuale

Tinând cont de domeniul din care provin aceste modele, prin intermediul lor se urmareste optimizarea unei proprietati ale unui amestecului cu pastrarea altora în anumite limite acceptabile. Cuantificarea proprietatii pentru care se realizeaza optimizarea produce functia obiectiv a modelului în timp ce exprimarile legate de mentinerea unor caracteristici în anumite limite produc restrictiile modelului, cu exceptia unei singure restrictii, cea de suma unitara. Altfel, modelul se poate exprima prin:

$$\begin{cases} opt\ cx \\ A^1 x \le b^1 \\ A^2 x \ge b^2 \\ \mathbf{1} \cdot x = 1 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \quad (1)$$

unde c este vectorul de dimensiune n al coeficientilor functiei obiectiv, functie care cuantifica proprietatea avuta în vedere în procesul de optimizare; $A^1 x \le b^1$ si $A^2 x \ge b^2$ reprezinta sistemul de inecuatii prin care sunt exprimate alte proprietati dorite pentru amestec în anumite limite, A^1 fiind o matrice cu m^1 linii si n coloane, A^2 o matrice cu m^2 linii si n coloane, b^1 un vector de dimensiune m^1 si b^2 un vector de dimensiune m^2;
$\mathbf{1}$ este un vector de dimensiune n cu toate componentele egale cu 1 cu ajutorul caruia se exprima conditia de suma unitara. În plus, se considera ca toate valorile care intervin în exprimarea modelului sunt nenegative, cele din functia obiectiv si din membrii drepti ai inecuatiilor conditii fiind chiar pozitiv definite.
În forma extinsa acest model poate fi rescris sub forma:

$$\begin{cases} opt \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^1 x_i \le b_j^1 \quad pentru \quad j = 1,\dots, m^1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 x_i \ge b_j^2 \quad pentru \quad j = 1,\dots, m^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0 \quad orice \quad i = 1,\dots, n \end{cases} \quad (2)$$

unde, asa cum am vazut mai sus pentru coeficientii functiei obiectiv si pentru valorile matricelor A^1 si A^2, si pentru vectorii b^1 si b^2 sunt îndeplinite urmatoarele conditii:
- $c_i > 0$ pentru orice $i = 1,\ldots,n$;
- $a_{ij}^1 \geq 0$ pentru orice $i = 1,...,n$ si pentru orice $j = 1,...,m^1$;
- $a_{ij}^2 \geq 0$ pentru orice $i = 1,...,n$ si pentru orice $j = 1,...,m^2$;
- $b_j^1 > 0$ pentru orice $j = 1,...,m^1$ si
- $b_j^2 > 0$ pentru orice $j = 1,..., m^2$.

Proprietati directe pentru forma generala a programelor procentuale

Forma prezentata este în fapt una mult mai restrictiva decât cea vizibila în exprimarile (1) sau (2), însa conditionarea suplimentara este una implicita si este legata de interventia conditiei de suma unitara.

Proprietate 1. Daca $\bar{x}$ este o solutie admisibila pentru modelul (1) atunci, pentru orice $i = 1,...,n$ avem $\bar{x}_i \in [0,1]$.

Demonstratie: Faptul enuntat este imediat deoarece, în general din conditia de nenegativitate a variabilelor modelului avem ca pentru orice $i = 1,...,n$, $\bar{x}_i \geq 0$. Daca prin absurd o componenta ar fi supraunitara, deci exista j astfel încât $\bar{x}_j > 1$ atunci prin sumarea componentelor am avea

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \bar{x}_i + \bar{x}_j \geq 0 + \bar{x}_j > 0 + 1 = 1$$

deci nu s-ar respecta conditia de suma unitara.

Proprietatea 1 ne spune ca toate variabilele modelului sunt subunitare si au suma unitara de unde putem considera ca ele reprezinta procente de alocare a unor resurse, de unde si numele pe care l-am adoptat pentru aceasta clasa de modele.

Proprietatea ne mai spune si ca toate solutiile admisibile pentru modelul (1) se gasesc în hipercubul unitate cu un vârf în originea axelor de coordonate si cu n din laturi pe cele n axe de coordonate ale spatiului R^n pe care modelul este definit. Aceasta observatie ne asigura de faptul ca, daca multimea solutiilor admisibile este nenula atunci este marginita si astfel, functia obiectiv are optim finit.

Afirmatia facuta se poate rezuma în urmatorul enunt:

Proprietate 2. Daca multimea solutiilor admisibile pentru problema (1) este nevida atunci problema are optim finit.

Demonstratie: Rezultatul anuntat în aceasta proprietate este imediat folosind proprietatea 1. Astfel, deoarece $c_i > 0$ pentru orice $i = 1,\ldots,n$ si din proprietatea 1, pentru orice $i = 1,\ldots,n$ avem $x_1 \leq 1$ atunci în functia obiectiv putem majori fiecare necunoscuta prin valoarea 1 (si putem minora fiecare necunoscuta prin valoarea 0) si obtinem ca pentru orice solutie admisibila x avem:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i c_i \leq \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot c_i = M$$

unde, cu M am notat suma coeficientilor functiei obiectiv. Astfel, daca multimea solutiilor admisibile pentru problema (1) este nevida, atunci pentru fiecare solutie admisibila x avem $v(x) \in [0, M]$, unde prin v(x) am notat valoarea functiei obiectiv pentru solutia admisibila x. Cum solutiile optime sunt în multimea solutiilor admisibile, rezulta ca daca $\tilde{x}$ este o solutie optima, atunci $v(\tilde{x}) \in [0, M]$, deci este la rândul ei marginita.

Discretizarea formei generale pentru programele procentuale

Forma generala nu este întotdeauna utila în rezolvarea modelelor propuse ca modele procentuale. Acest lucru apare în special atunci când coeficientii implicati în matricele de restrictii sunt relativ mici ca valoare. În astfel de cazuri erorile de aproximare în rezolvarea problemelor cu ajutorul calculatoarelor electronice si propagarea acestor erori au ca efect aparitia fenomenelor de neconvergenta în aplicarea algoritmilor de calcul, intrând exact în zonele în care acesti algoritmi au comportamente contradictorii.

Aceste comportamente pot parea paradoxale, în special în contextul în care, pentru modelele procentuale pentru care existenta unei solutii admisibile asigura existenta solutiilor optime. Ele pot fi înlaturate prin utilizarea unor procese de calcul foarte sofisticate în care numerele reale sa fie aproximate cu un numar suficient de zecimale încât sa se produca foarte greu fenomenul de aparitie a zerourilor de aproximare.

O a doua modalitate de rezolvare a comportamentelor paradoxale pentru algoritmii clasici de rezolvare a problemelor de programare liniara cu variabile continue este de a realiza modificarea modelelor utilizate. Acest lucru este posibil în special si datorita faptului ca, în practica, precizia finala retinuta din aplicarea modelului este de maxim 4 cifre semnificative (în general valori exprimate ca procente la suta care în reprezentarea utila aplicarii modelului se dau cu cel mult 2 zecimale).

Programele de optimizare transformate se obtin prin trecerea din domeniul continuu într-un domeniu discret. Cu multimea solutiilor admisibile pentru modelele procentuale generale este una marginita, acelasi lucru se va întâmpla si pentru modelele obtinute prin transformare si care vor intra astfel în zona modelelor combinatoriale.

Facem aceasta afirmatie deoarece, transformarea pe care o propunem este de a trece de la variabile procentuale la variabile întregi, obtinându-se astfel, în general probleme de programare liniara întreaga. Cum variabilele modelului original sunt marginite, rezulta ca si variabilele din modelul obtinut prin transformare trebuie sa fie marginite si astfel modelul de programare întreaga este de fapt un model de optimizare combinatoriala.

Modalitatea de transformare pe care o propunem este de multiplicare a fiecarei relatii din modelul original prin puterea lui 10 care asigura precizia dorita si restrictionarea suplimentara a variabilelor modelului la numere întregi dupa redefinire.

Daca vom considera ca precizia dorita pentru rezultatele aplicarii modelului procentual este de k cifre exacte, atunci prima etapa în transformarea modelului (1) este de a înmulti fiecare relatie prin $\alpha = 10^k$ si retinerea acestei multiplicari în zona variabilelor modelului. Se obtine astfel formularea:

$$\begin{cases} opt \sum_{i=1}^{n} c_i(\alpha x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^1(\alpha x_i) \le \alpha b_j^1 \quad pentru \quad j = 1,\dots,m^1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2(\alpha x_i) \ge \alpha b_j^2 \quad pentru \quad j = 1,\dots,m^2 \\ \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) = \alpha, \\ x_i \in [0,1] \quad pentru \quad i = 1,\dots,n \end{cases} \qquad (3)$$

unde, am introdus ca explicita conditia de domeniu implicita rezultata pentru modelul (1) din proprietatea 1.

A doua etapa a transformarii realizeaza redenumirea variabilelor modelului, înlocuindu-se αx_i prin y_i, pentru a se obtine formularea:

$$\begin{cases} opt \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^1 y_i \le \alpha b_j^1 \quad pentru \quad j = 1,\dots,.m^1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 y_i \ge \alpha b_j^2 \quad pentru \quad j = 1,\dots,m^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha \\ y_i \in [0,\alpha] \quad pentru \quad i = 1,\dots,n \end{cases} \qquad (4)$$

Se poate observa ca modelul (4) se poate obtine direct din modelul (2) prin schimbarea numelui variabilelor, multiplicarea termenilor liberi din sistemul de restrictii si înlocuirea conditiei de pozitivitate a variabilelor prin conditia de domeniu explicita $y_i \in [0,\alpha]$ pentru $i = 1,\dots,n$.

Ultima etapa în transformarea modelului (2) este de a impune conditiile de integralitate asupra variabilelor noului model, în acest mod obtinându-se un model de optimizare combinatoriala care se poate rezolva prin instrumentele specifice acestui tip de optimizare. Modelul este definit în forma compacta prin:

$$\begin{cases} opt\, cy \\ A^1 y \le \alpha b^1 \\ A^2 y \ge \alpha b^2 \\ \mathbf{1} \cdot y = \alpha \\ y \in \{0,1,\dots,\alpha\}^n \end{cases} \qquad (5)$$

Proprietati legate de discretizarea modelelor procentuale

Modelele (2) si (4) pot fi considerate echivalente din punct de vedere al solutiilor pentru ca transformarea care a fost aplicata este de factura liniara. Acest lucru poate fi rezumat în urmatorul rezultat:

Proprietate 3.

a) multimea solutiilor admisibile pentru modelul (2) este vida daca si numai daca multimea solutiilor admisibile pentru modelul (4) este vida.

b) multimea solutiilor admisibile pentru modelul (2) este nevida daca si numai daca multimea solutiilor admisibile pentru modelul (4) este nevida. În plus, daca $\bar{x}$ este solutie optima pentru (2) si daca $\bar{y}$ este solutie optima pentru (4) atunci are loc relatia $\alpha v(\bar{x}) = w(\bar{y})$, $\alpha\bar{x}$ este solutie optima pentru (4) si $\frac{1}{\alpha}\bar{y}$ este solutie optima pentru (2), unde w(y) este valoarea functiei obiectiv pentru o solutie admisibila y a modelului (4).

Demonstratie. Rezultatul este imediat din modul de constructie al modelului (4) pornind de la modelul (2). Într-adevar, daca (2) are multimea solutiilor admisibile vida atunci nici un sistem de variabile ale modelului nu îndeplinesc conditiile, nici cele initiale, nici cele multiplicate cu o constanta, de unde rezulta punctul a) al enuntului.

Presupunem acum ca multimea solutiilor admisibile este nevida pentru unul din modele. Rezulta atunci ca si cel de-al doilea model are multimea solutiilor admisibile nevida pentru ca altfel s-ar contrazice punctul a) al enuntului. Putem vorbi astfel de solutiile optime ale celor doua modele. Fie $\bar{x}$ o solutie optima pentru modelul (2) si $\bar{y}$ o solutie optima pentru modelul (4).

$\bar{x}$ fiind solutie optima este si solutie admisibila si astfel verifica sistemul de restrictii. Conform modului de trecere de la modelul (2) la modelul (4), rezulta ca $\alpha\bar{x}$ verifica sistemul de restrictii pentru modelul (4) si astfel este solutie admisibila pentru (4). Prin absurd $\alpha\bar{x}$ nu este solutie optima pentru (4). Atunci, fie z o solutie admisibila pentru (4) pentru care w(z) este mai aproape de optimul lui (4) decât $w(\alpha\bar{x})$. Revenind acum la modelul (2) prin demultiplicarea lui z cu α, putem trage concluzia ca $\frac{1}{\alpha}z$ este solutie admisibila pentru (2) si $v\left(\frac{1}{\alpha}z\right)$ este mai apropiata de valoarea optima decât $v(x)$, ceea ce contrazice faptul ca $\bar{x}$ este solutie optima pentru (2). Am aratat astfel prin absurd ca $\alpha\bar{x}$ este solutie optima pentru (4).

Procedând în mod analog se demonstreaza ca $\frac{1}{\alpha}\bar{y}$ este solutie optima pentru (2). În aceasta demonstratie am tinut cont inclusiv de faptul ca putem avea un optim multiple, si astfel valorile considerate ca solutii optime în cele doua modele sunt diferite.

Acum, deoarece $\alpha\bar{x}$ si $\bar{y}$ sunt doua solutii optime pentru modelul (4) rezulta ca

$$w(\bar{y}) = w(a\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(a\bar{x}_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} ac_i\bar{x}_i = a\sum_{i=1}^{n} c_i\bar{x}_i = av(\bar{x}),$$

ceea ce completeaza demonstratia.

Concluzii si abordari ulterioare

Acest material doreste sa ofere o varianta de abordare a problemelor definite drept probleme de optimizare procentuala. Acest lucru are loc în contextul încercarii de evitare a comportamentelor neconvergente pentru algoritmii care rezolva problemele de programare liniara. Acest material si-a propus doar sa defineasca elementele constitutive ale subiectului abordat, autorul dorind sa revina în cel mai scurt timp cu definirea unei structuri speciale asupra problemelor de optimizare procentuala si care ofera o modalitate de cautare relativ buna în spatiul solutiilor. Oricum trecerea la modelul combinatorial reduce problema determinarii unei solutii optime la abordarea gasirii unei descompuneri a valorii α ca suma de valuri din $[0,\alpha]$ si pentru care se obtine cea mai buna valoare pentru functia obiectiv.

Bibliografie

[1] L. Serbulescu, M. Ciocoiu, S. Bârza - Optimizarea Retetelor de amestec fibros destinate obtinerii fibrelor cardate prin utilizarea algoritmului simplex, Revista Româna de Textile -Pielarie nr.4/2000, pp.11-16;

[2] S. Bârza, L.Serbulescu - Rezolvarea problemelor de programare liniara prin algoritmul simplex clasic, Revista Româna de Textile-Pielarie nr. 1/2001, pp. 11-16;

[3] S. Bârza, Transformarea combinatoriala a problemelor de programare liniara cu aplicatii în economie, Comunicare la simpozionul stiintific economic al Universitatii Spiru Haret, Bucuresti, mai 2001;

[4] S. Bârza, Principalele instrumente utilizate în formularea problemelor de programare matematica bazata pe combinatorica (retrospectiva). Comunicare la simpozionul ICEC-2002, octombrie 2002, în curs de aparitie;

[5] Goemans M.X., *Semidefinite Programming and Combinatorial Optimization*, Doc. Math. Extra Volume ICM, 1998, 657-666

[6] Goemans M.X., Rendl F., *Semidefinite Programming in Combinatorial Optimization*, November 1999

[7] Hoffman K.L., *Combinatorial Optimization: Current Successes and Directions for the Future*, Journal of Computational and Applied Mathematics 124 pp.341, 2000

[8] Nemhauser G.L., Wolsey L.A., *Integer and combinatorial optimization*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1999.

[9] Parker R.G., Rardin R.L., *Discrete Optimization*, Academic Press, Boston, 1998