Program pentru utilizarea functiilor spline în probleme de interpolare neliniara

Conf.dr. Mihaela MUNTEAN
Catedra de Informatica Economica, Facultatea de Stiinte Economice
Universitatea de Vest Timisoara

În mod obisnuit, rezultatele unei investigatii experimentale, fie în probleme economice, fie în probleme tehnice, se prezinta sub forma unei multimi de puncte în R^2 sau R^3. Avînd la dispozitie aceste rezultate prime, problema de prelucrare a lor este strîns legata de aproximarea analitica prin interpolare. Sub aspect matematic problema este foarte veche si a constituit obiectul unor intense preocupari a marilor matematicieni Newton, Lagrange, Gauss, Euler, Cebîsev. În ultimele decenii un loc important revine utilizarii functiilor spline, a caror multime formeaza un spatiu liniar [1], [2], [3]. Ele prezinta din punct de vedere aplicativ, datorita formei polinomiale, avantajul de a fi usor programabile conducînd la solutii finale numerice. Important este faptul ca functiile spline polinomiale au proprietatea de a minimiza o anumita seminorma a functiei spline de interpolare de grad impar, iar utilizînd tehnica spatiilor Hilbert se poate defini elementul spline ca unica solutie a unei probleme variationale. Acest lucru permite obtinerea proprietatilor importante ale tuturor multimilor liniare de functii spline, cum ar fi functiile spline polinomiale, trigonometrice, exponentiale, functiile L-spline, de tip Cebîsev etc. Se poate studia astfel si convergenta functiilor spline de interpolare catre functia pe care o interpoleaza în normele obisnuite Cebîsev si L^2, precum si ordinul de convergenta.

***Cuvinte cheie**: functii spline, interpolare liniara, solutii numerice.*

Urmarind diversele tipuri de polinoame de interpolare s-a constatat în procesul utilizarii lor practice ca se poate întîmpla ca diferenta dintre valorile functiei $f(x)$ si ale polinomului de interpolare în afara nodurilor $\{x_i\}$ sa fie foarte mare. Constructia unei retele mai dese si a unui polinom de un grad mai mare nu rezolva problema. Exemplele lui Runge (1901), ale lui Bernstein (1912) precum si celebra teorema a lui Faber (1914) au aratat ca polinomul nu este cel mai potrivit instrument de aproximare a unei functii date. Asa au aparut functiile spline care sunt functii segmentar polinomiale, care se racordeaza în noduri împreuna cu un anumit numar de derivate ale lor. Desi aparent noua, fiind introdusa de I.J. Schoenberg în 1946, notiunea îsi are originea în lucrarile matematicienilor din antichitate care utilizau liniile poligonale la calculul ariilor si volumelor. Generalizarile au aparut dupa 1958 cînd începe utilizarea metodelor analizei functionale, cînd Golomb si Weinberger pornind de la aproximarea functionalelor liniare si continue, introduc notiunea de functie spline într-un spatiu Hilbert. Dupa 1968 se produce o dezvoltare exploziva în acest domeniu creându-se adevarate scoli de functii spline (Madison, Grenoble, Novosibirsk, Münster etc.) privind mai ales aplicarea lor la rezolvarea numerica a ecuatiilor diferentiale neliniare sau cu derivate partiale, ecuatii integrale, sisteme integro-diferentiale etc.

Ma voi ocupa numai de functiile spline cubice; tentatia utilizarii acestora este legata de proprietatile lor de extrem descoperite destul de tîrziu. Astfel, pe lînga conditiile de continuitate si derivabilitate în noduri, care afirma ca functia spline de interpolare pe $[a,b]$ cu:

$$f_s(x_i)=y_i\,;Df_{s,i}(x_{i+1})=Df_{s,i+1}(x_{i+1});D^2f_s(a)=D^2f_s(b)=0 \qquad (1)$$

este unica solutie a urmatoarei probleme de extrem:

$$\left[\int_a^b (D^2 f_s)^2\,dx\right]^{1/2} = \inf\left[\int_a^b (D^2 g_s)^2\,dx\right]^{1/2},g\in J[Y] \qquad (2)$$

unde $J(Y)=\{g\in C^2[a,b] \mid g(x_i)=y_i\,,i=\overline{1,N}\}$.

Aceasta este numita functie spline cubica naturala.

În continuare este prezentata o modalitate de a construi polinomul spline cubic de interpolare, pentru cazul în care pe $[a,b]\subset \mathbf{R}$ este data o diviziune

$$\Delta : a = H_1 < H_2 < \ldots < H_{n-1} < H_n = b \qquad (3)$$

si vectorul

$$Y\in R^n\,, Y=(B_1,B_2,\ldots,B_n)\,.$$

Se va considera acesta functie pe intervalul $I_i=(x_i\,,x_{i+1})$, sub forma urmatoare:

$$f_{s,i}=a_i+b_i(H-H_i)+c_i(H-H_i)^2+d_i(H-H_i)^3 \qquad (4)$$

În conformitate cu definitia functiilor spline, trebuie sa fie satisfacute urmatoarele conditii:

$$f_{s,i}(H_i)=B_i\,,\ f'_{s,i}(H_i)=m_i\,,$$
$$f_{s,i}(H_{i+1})=B_{i+1}$$
$$f'_{s,i}(H_{i+1})=f'_{s,i+1}(H_{i+1})=m_{i+1} \qquad (5)$$
$$f_{s,i+1}(H_{i+1})=B_{i+1} \qquad f'_{s,i+1}(H_{i+2})=m_{i+2}$$
$$f_{s,i+1}(H_{i+2})=B_{i+2}\ \ f''_{s,i}(H_{i+1})=f''_{s,i+1}(H_{i+1})$$

Utilizarea globala a acestor conditii conduce la calcule deosebit de greoaie si lungi. De aceea, am realizat un proces semiite-rativ care sa permita întocmirea unui pro-gram cît mai simplu. Avem succesiv urma-toarele relatii, utilizînd numai conditiile precizate:

- pentru $H = H_i$, conditia $f_{s,i}(H_i)=B_i$ conduce la $a_i = B_i$
- pentru $H = H_{i+1}$, conditia $f_{s,i}(H_{i+1})=B_{i+1}$ conduce la

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = B_{i+1}$$

- pentru $H = H_i$, conditia $f'_{s,i}(H_i)=m_i$ conduce la $b_i = m_i$
- pentru $H = H_{i+1}$, conditia $f'_{s,i}(H_{i+1})=m_{i+1}$ conduce la $b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = m_{i+1}$.

În relatiile de mai sus s-a notat cu $h_i:=(H_{i+1}-H_i)$, $Df_{s,i}(H_j)=m_j\,,j=i;i+1$. În urma ordonarii se obtine:

$$a_i = B_i\,;\ b_i = m_i$$
$$c_i + d_i h_i = \frac{B_{i+1}-B_i}{h_i^2} - \frac{m_i}{h_i} \qquad (6)$$
$$2c_i + 3d_i h_i = \frac{m_{i+1}-m_i}{h_i}\,,$$

de unde rezulta expresiile pentru ceficientii c_i si d_i .

$$c_i = 3\frac{B_{i+1}-B_i}{h_i^2} - \frac{m_{i+1}+2m_i}{h_i} \qquad (7)$$
$$d_i = -2\frac{B_{i+1}-B_i}{h_i^3} + \frac{m_{i+1}+m_i}{h_i^3}$$

Cu aceste rezultate , functia $f_{s,i}(H)$ devine:

$$f_{s,i}(H)=B_i+m_i(H-H_i)+\left(3\frac{B_{i+1}-B_i}{h_i^2}-\frac{m_{i+1}+2m_i}{h_i}\right)(H-H_i)^2+\left(-2\frac{B_{i+1}-B_i}{h_i^3}+\frac{m_{i+1}+m_i}{h_i^2}\right)(H-H_i)^3$$

$i=\overline{1,n-1}$

Impunînd conditia $f''_{s,i}(H_{i+1})=f''_{s,i+1}(H_{i+1})$ relativa la derivatele partiale de ordinul doi, a caror expresie este data mai jos, se obtine relatia (9):

$$f''_{s,i}(H)=2c_i+6d_i(H-H_i);f''_{s,i+1}(H)=2c_{i+1}+6d_{i+1}(H-H_{i+1}) \qquad (8)$$

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}\,. \qquad (9)$$

Se obtine, tinînd cont de expresiile gasite mai sus, urmatorul sistem liniar, cu ajutorul caruia se vor determina pantele la graficul functiei de aproximatie în nodurile retelei date.

$$h_{i+1} m_i + 2(h_i + h_{i+1}) m_{i+1} + h_i m_{i+2} = 3\left(h_i \frac{B_{i+2} - B_{i+1}}{h_{i+1}} + h_{i+1} \frac{B_{i+1} - B_i}{h_i} \right) \quad (10)$$

$$i = \overline{1, n-2}$$

Pentru a usura si organiza algoritmic rezolvarea acestui sistem, se împarte cu $(h_i + h_{i+1}) > 0$.

$$\frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} m_i + 2\, m_{i+1} + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} m_{i+2} = \frac{3}{h_i + h_{i+1}} \left(h_i \frac{B_{i+2} - B_{i+1}}{h_{i+1}} + h_{i+1} \frac{B_{i+2} - B_i}{h_i} \right) \quad (11)$$

$$i = \overline{0, n-2}$$

Daca se noteaza cu:

$$A_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \; ; \; C_{i+1} = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \; ; \; D_{i+1} = \frac{3}{h_i + h_{i+1}} \left(h_i \frac{B_{i+2} - B_{i+1}}{h_{i+1}} + h_{i+1} \frac{B_{i+1} - B_i}{h_i} \right) \quad (12)$$

$$A_{i+1} + C_{i+1} = 1 \; ; \; i = \overline{1, n-2}$$

sistemul (11) se poate scrie sub forma:

$$A_{i+1} m_i + 2 m_{i+1} + C_{i+1} m_{i+2} = D_{i+1} ; i = \overline{1, n-2} \quad (13)$$

S-a obtinut un sistem de *(n-2)* ecuatii cu *n* necunoscute (m_i), care nu este univoc rezolvabil. Trebuie sa mai adaugam doua conditii la limita suplimentare. Exista diverse metode de a rezolva problema, impunînd - de exemplu - conditii de prelungire analitica în afara domeniului de definitie. Eu voi presupune ca la capetele intervalului de definitie este cunoscuta panta graficului:

$$f'_{s,i}(H_1) = m_1 ; f'_{s,n-1}(H_n) = m_n \quad (14)$$

Aceste valori aproximative se vor calcula facînd urmatorul artificiu : (daca numarul de intervale este suficient de mare). Se va scoate din circuitul valorilor de capat cîte o pereche de valori, pentru care se presupune ca functia variaza liniar, deci se va putea calcula panta. Evident ca procesul poate fi iterativ, adica dupa o prima aproximatie se poate lucra cu alte pante la capetele intervalului, renuntînd la înca un mic interval de diviziune interior, de la capetele intervalului. Se poate, de asemenea, împarti intervalul de capat în alte subintervale si sa se admita initial o alta variatie etc.

Pentru a face o verificare concreta a programului am ales niste rezultate experimentale de pe un grafic oarecare puternic neliniar (tabelul 1). Pe baza acestor rezultate s-a întocmit matricea sistemului de ecuatii (13) si s-au rezolvat ecuatiile polinomiale aproximative pe fiecare subinterval de diviziune al domeniului de definitie (tabelul 2).

În continuare am studiat, fara sa prezint rezultatele, urmatoarele doua probleme:

- cum variaza erorile pe primul interval $H \in [2.11, 2.61]$ cu un pas de 0.05 si pe un interval de la mijlocul domeniului $H \in [15.8, 25]$ pentru acelasi pas de discretizare;
- cum se schimba curbele de aproximatie pe cele doua intervale precizate mai sus, daca la capatul din stânga, panta graficului, care a fost aleasa de mine, obtine alte 10 valori posibile.

Tabelul nr. 1

Date initiale		**Date calculate**			
H_i	B_i	h_i	A_{i+1}	C_{i+1}	D_{i+1}
H_1 = 2,11	B_1 = 0,6	h_1 = 0,5	A_2 = 0,53272	C_2 = 0,46728	D_2 = 0,56556

H_2 = 2,61	B_2 = 0,7	h_2 = 0,57	A_3 = 0,58088	C_3 = 0,41912	D_3 = 0,46488
H_3 = 3,18	B_3 = 0,8	h_3 = 0,79	A_4 = 0,57066	C_4 = 0,42934	D_4 = 0,42301
H_4 = 3,97	B_4 = 0,9	h_4 = 1,05	A_5 = 0,58	C_5 = 0,42	D_5 = 0,25261
H_5 = 5,02	B_5 = 1,0	h_5 = 1,45	A_6 = 0,57478	C_6 = 0,42522	D_6 = 0,184
H_6 = 6,47	B_6 = 1,1	h_6 = 1,96	A_7 = 0,60244	C_7 = 0,39756	D_7 = 0,13236
H_7 = 8,43	B_7 = 1,2	h_7 = 2,97	A_8 = 0,59702	C_8 = 0,40298	D_8 = 0,08778
H_8 = 11,4	B_8 = 1,3	h_8 = 4,4	A_9 = 0,67647	C_9 = 0,32353	D_9 = 0,05667
H_9 = 15,8	B_9 = 1,4	h_9 = 9,2	A_{10}= 0,67025	C_{10}= 0,32975	D_{10}= 0,02714
H_{10} = 25	B_{10} = 1,5	h_{10} = 18,7	A_{11}= 0,64584	C_{11}= 0,35416	D_{11}= 0,01347
H_{11} = 43,7	B_{11} = 1,6	h_{11} = 34,1	A_{12}= 0,59549	C_{12}= 0,40451	D_{12} =0,007656
H_{12} = 77,8	B_{12} = 1,7	h_{12} = 50,2	A_{13}= 0,57885	C_{13}= 0,42115	D_{13}= 0,00529
H_{13} = 128	B_{13} = 1,8	h_{13} = 69	A_{14}= 0,62087	C_{14}= 0,37913	D_{14}=0,003705
H_{14} = 197	B_{14} = 1,9	h_{14} = 113	A_{15}= 0,75327	C_{15}= 0,24673	D_{15}=0,002214
H_{15} = 310	B_{15} = 2,0	h_{15} = 345	A_{16}= 0,69469	C_{16}= 0,30531	D_{16}= 0,00072
H_{16} = 655	B_{16} = 2,1	h_{16} = 785	A_{17}= 0,50474	C_{17}= 0,49526	D_{17} =0,000378
H_{17} = 1440	B_{17} = 2,2	h_{17} = 800	A_{18} = 0,5	C_{18} = 0,5	D_{18} = 0,00375
H_{18} = 2240	B_{18} = 2,3	h_{18} = 800	A_{19} = 0,5	C_{19} = 0,5	D_{19} =0,000375
H_{19} = 3040	B_{19} = 2,4	h_{19} = 800	-	-	-
H_{20} = 3840	B_{20} = 2,5	-	-	-	-

Tabelul 2 $m_1 = 0,25$; $m_{20} = 1,25 \cdot 10^{-4}$

$h=H_{i+1}-H_i$	**$H_i \sim H_{i+1}$**	**$f_{s,i}$=ecuatia functiei de aproximare pe domeniul [i , i+1]**
h_1=0,5	(2,11 ÷2,61)	$f_{s,1} = 0,6 + 0,25 (H - 2,11) + 0,052 (H - 2,11)^2 - 0,304 (H - 2,11)^3$
h_2=0,57	(2,61 ÷3,18)	$f_{s,2} = 0,7 + 0,074 (H - 2,61) + 0,346168 (H - 2,61)^2 - 0,295097 (H - 2,61)^3$
h_3=0,79	(3,18 ÷3,97)	$f_{s,3} = 0,8 + 0,181 (H - 3,18) - 0,1610799 (H - 3,18)^2 + 0,1167047 (H - 3,18)^3$
h_4=1,05	(3,97 ÷5,02)	$f_{s,4} = 0,9 + 0,145 (H - 3,97) - 0,0717006 (H - 3,97)^2 + 0,0231508 (H - 3,18)^3$
h_5=1,45	(5,02 ÷6,47)	$f_{s,5} = 1,0 + 0,071 (H - 5,02) + 0,00130797(H - 5,02)^2 - 0,0018696 (H - 5,02)^3$
h_6=1,96	(6,47 ÷8,43)	$f_{s,6} = 1,1 + 0,063 (H - 6,47) - 0,0076217 (H - 6,47)^2 + 0,000770361 (H - 6,47)^3$
h_7=2,97	(8,43 ÷11,4)	$f_{s,7} = 1,2 + 0,042 (H - 8,43) - 3,70033 \cdot 10^{-3} (H - 8,43)^2 + 0,30155 \cdot 10^{-3} (H - 2,11)^3$
h_8=4,4	(11,4 ÷15,8)	$f_{s,8} = 1,3 + 0,028 (H - 11,4) - 1,32239 \cdot 10^{-3} (H - 11,4)^2 + 0,02818 \cdot 10^{-3} (H - 11,4)^3$
h_9=9,2	(15,8 ÷25)	$f_{s,9} = 1,4 + 0,018 (H - 15,8) - 0,0019778 (H - 15,8)^2 + 0,0000329566 (H - 15,8)^3$
h_{10}=18,7	(25 ÷43,7)	$f_{s,10} = 1,5 + 6,925 \cdot 10^{-3} (H - 25) - 1,01884 \cdot 10^{-4} (H - 25)^2 + 0,09375 \cdot 10^{-5} (H - 25)^3$
h_{11}=39,1	(43,7 ÷77,8)	$f_{s,11} = 1,6 + 4,098 \cdot 10^{-3} (H- 43,7) - 0,48515 \cdot 10^{-4} (H- 43,7)^2 + 0,42044 \cdot 10^{-6} (H-43,7)^3$

h_{12}=50,2	(77,8 ÷128)	$f_{s,12}$ = 1,7 +2,256 .10^{-3} (H - 77,8) - 0,055366 . 10^{-4} (H - 77,8)^2 + 5,53.10^{-9} (H - 77,8)^3
h_{13}=69	(128 ÷197)	$f_{s,13}$ = 1,8 + 1,742 . 10^{-3} (H - 128) - 0,47271 . 10^{-5} (H - 128)^2 + 7,026 . 10^{-9} (H - 128)^3
h_{14}=113	(197 ÷310)	$f_{s,14}$ = 1,9 + 11,9 . 10^{-4} (H - 197) - 0,327197 . 10^{-5} (H - 197)^2 + 5,066 . 10^{-9} (H - 197)^3
h_{15}=345	(310 ÷655)	$f_{s,15}$ = 2 + 6,446 . 10^{-4} (H - 310) - 1,55273 . 10^{-6} (H - 310)^2 + 1,52312 . 10^{-9} (H - 310)^3
h_{16}=785	(655 ÷1440)	$f_{s,16}$ =2,1+ 1,164 . 10^{-4} (H - 655) + 0,26071 . 10^{-7} (H - 655)^2 - 0,1538 . 10^{-10} (H - 655)^3
h_{17}=800	(1440 ÷2240)	$f_{s,17}$ =2,2 +1,289 .10^{-4} (H - 1440) - 0,085 .10^{-7} (H - 1440)^2 + 0,04531 .10^{-10} (H -1440)^3
h_{18}=800	(2240 ÷3040)	$f_{s,18}$ =2,3 +1,24 .10^{-4} (H - 2240) + 0,02125 .10^{-7} (H- 2240)^2 - 0,01094 .10^{-10} (H-2240)^3
h_{19}=800	(3040 ÷3840)	$f_{s,19}$ = 2,4 + 1,253 . 10^{-4} (H - 3040) - 7,5 . 10^{-10} (H - 3040)^2 + 4,68 . 10^{-13} (H - 3040)^3

Metoda de determinare a functiilor de aproximare de tip spline cubic, descrisa si utilizata în cadrul acestei lucrari, se poate sintetiza în urmatoarea exprimare într-un limbaj de tip pseudocod.

Spline_cubica (n, H, B, m, a, b, c, d)
‘Intrari: n = numarul punctelor de interpolare (20)
‘ H = (H_1, H_2, ..., H_n) suportul interpolarii
‘ B = (B_1, B_2, ..., B_n) valorile functiei pe suportul interpolarii
‘Iesiri: m = (m_1, m_2, ..., m_n) pantele la graficul functiei de aproximare în noduri
‘ a = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}) coeficientii functiilor spline de aproximare pe cele
‘ b = (b_1, b_2, ..., b_{n-1}) (n-1) intervale
‘ c = (c_1, c_2, ..., c_{n-1})
‘ d = (d_1, d_2, ..., d_{n-1})

<u>Început</u>
<u>introdu</u> valorile marimilor de intrare
‘ calculul marimilor din Tabelul 2.3
h [1] ← H [2] - H [1]
<u>pentru</u> i ← 2 : n-1 <u>repeta</u>
h [i] ← H [i +1] - H [i]

$$A[i] \leftarrow \frac{h[i]}{h[i-1]+h[i]}$$

$$C[i] \leftarrow \frac{h[i-1]}{h[i-1]+h[i]}$$

$$D[i] \leftarrow \frac{3}{h[i-1]+h[i]}\left(h[i-1]\frac{B[i+1]-B[i]}{h[i]}+h[i]\frac{B[i]-B[i-1]}{h[i-1]}\right)$$

<u>sfîrsit</u>
‘ determinarea matricei sistemului
T_LIBER [1] ← 1

```
    T_LIBER [n] ← 0,0005
    pentru i ← 1 : n repeta
        M_SISTEM [i,i ] ← 2
        daca i < = n-2 atunci
            M_SISTEM [i+1,i ] ← A [i+1]
            M_SISTEM [i+1,i +2] ← C [i+1]
            T_LIBER [i+1] ← D [i+1]
        sfîrsit
    sfîrsit
‘   determinarea pantelor m = (m1, m2, ...., mn), adica se rezolva ecuatia matriceala
‘   M_SISTEM x m = T_LIBER
    m = M_SISTEM^-1 x T_LIBER
‘   se determina coeficientii functiilor spline pentru fiecare interval
    pentru i ← 1 : n-1 repeta
        a [i] ← B [i]
        b [i] ← m [i]
```

$$c\,[i] \leftarrow 3\frac{B[i+1]-B[i]}{h[i]^2}-\frac{m[i+1]+2m[i]}{h[i]}$$

$$d\,[i] \leftarrow -2\frac{B[i+1]-B[i]}{h[i]^3}+\frac{m[i+1]+m[i]}{h[i]^3}$$

```
    sfîrsit
sfîrsit
```

În concluzie se observa ca valorile de capat nu pot fi absolut arbitrare. La o crestere de 200 ori a parametrului m_1 (de la 0,25 la 50) pe primul interval erorile cresc brusc pîna la 700. Dar, la variatii rezonabile în jurul valorii calculate initial sunt foarte mici si nu depasesc 3%. Datorita rezultatelor obtinute, consider ca modul de analiza propus de mine este foarte acceptabil si eficace.

Bibliografie

- Iorga V., Jora B., Niculescu C., Lopatan I., Fatu I., Programare numerica, Editura Teora, Bucuresti, 1996
- Micula Gh., Functii spline si aplicatii, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1982
- Ming Yu, Kuffel E., Spline Element for Boundary Element Method, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 30, nr. 5, 1994, p.2905-2907
- Paraskevopoulos P.N., Kiritsis K.H., Minimal realization of recursive and non recursive 3D systems, IEE Proceedings, Part G, Vol. 140, pp 187-190, 1993
- Muntean M., Studii si cercetari privind analiza cîmpurilor magnetice prin metode numerice, Editura Eubeea, Timisoara, 1999, ISBN 973-99022-0-1